THEORIE UND ANWENDUNG

DER

DETERMINANTEN

VON

DR. RICHARD BALTZER

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GIESSEN, MITGLIED DER K. SÄCHS.
GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG.

FÜNFTE VERBESSERTE UND VERMEHRTE AUFLAGE.

LEIPZIG

VERLAG VON S. HIRZEL

1881

Vorrede

zur ersten Auflage.

Das mächtige Instrument der Algebra und Analysis, welches unter dem Namen der Determinanten in Gebrauch gekommen ist, war aus den bis vor wenig Jahren vorhandenen Quellen nicht leicht kennen zu lernen. Die grossen Meister hatten jenes Hülfsmittel für die höheren Zwecke, denen ihr Genius diente, sich geschaffen und waren wenig gesonnen, ihren Bau durch Betrachtungen über Material und Werkzeug, von deren Tüchtigkeit sie tiefe Ueberzeugung hatten, aufzuhalten. Daher ist es mit den Determinanten wie wohl mit allen wichtigen Instrumenten der Mathematik ergangen, dass sie längere Zeit im Besitz von wenig Auserwählten blieben, bevor eine geordnete Theorie derselben den Nichtkennern das Verständniss und den Gebrauch zugänglicher machte. Die erste Idee, der Algebra durch Bildung combinatorischer Aggregate, die heute Determinanten genannt werden, zu Hülfe zu kommen, rührt, wie Dirichlet bemerkt hat, von Leibniz her. Ausser dem Briefe an L'Hospital 1693 April 28 und dem Aufsatz Acta Erud. 1700 p. 200, in welchem Leibniz die Ueberzeugung von der Fruchtbarkeit seines Gedankens ausspricht, scheint aber nichts übrig zu sein, woraus sich schliessen liesse, dass Leibniz sich um weitere Früchte dieser Idee bemüht habe. Die zweite Erfindung der Determinanten durch Cramer 1750 blieb unverloren wegen der Dienste, die der Algebra daraus erwuchsen, theils durch Cramer selbst, theils nach einer Reihe von Jahren durch Bézout, Vandermonde, Laplace, Lagrange. Namentlich war es Vandermonde (sur l'élimination 1771), der einen Algorithmus der Determinanten zu begründen suchte, während Lagrange in der Abhandlung sur les pyramides 1773 von den Determinanten dritten Grades bei Problemen der analytischen Geometrie bereits in grosser Ausdehnung Gebrauch machte. Den wichtigsten Anstoss jedoch zur weiteren Ausbildung der Rech-

nung mit Determinanten haben GAUSS' Disquisitiones arithmeticae 1801 gegeben. Ausgehend von der Betrachtung der Algorithmen, welche in diesem Werke sich auf die »Determinanten der quadratischen Formen« beziehen, stellten CAUCHY und BINET 1812 die allgemeinen Regeln für die Multiplication der Determinanten auf, wodurch Rechnungen mit schwer zu bewältigenden Aggregaten eine unerwartete Leichtigkeit gewannen. Des neuen Calcüls, welchen besonders CAUCHY ausgebildet hatte, bemächtigte sich vorzüglich JACOBI 1826, dessen in Crelle's Journal niedergelegte Arbeiten reichlich Zeugniss geben, was das neue Instrument in des Meisters Hand zu leisten vermochte. Erst durch JACOBI's Abhandlungen »de formatione et proprietatibus determinantium« und »de determinantibus functionalibus 1841« wurden die Determinanten Gemeingut der Mathematiker, welches seitdem von verschiedenen Seiten her wesentliche Vermehrungen erhalten hat.

JACOBI's Abhandlung de formatione etc., welche nicht unmittelbar für das erste Studium des Gegenstandes verfasst ist, und SPOTTISWOODE elementary theorems relating to determinants, London 1851, eine Schrift, welche bei zweckmässiger Anordnung des Stoffes und einer guten Auswahl von Beispielen manche Ungenauigkeiten enthält, waren die einzigen vorhandenen Anleitungen zur Kenntniss der Determinanten, als ich mich entschloss, das zum grossen Theil noch zerstreute Material in eine Theorie der Determinanten, begleitet von den wichtigsten Anwendungen derselben, zusammenzustellen. Meine Arbeit war fast zum Abschluss gebracht, als mir BRIOSCHI la teorica dei determinanti, Pavia 1854, bekannt wurde. Dieses Werk, hervorgerufen durch das auf vielen Seiten gefühlte Bedürfniss einer elementaren Anleitung zur Kenntniss der Determinanten, ist mit vorzüglicher Sachkenntniss geschrieben und enthält einen reichen Schatz trefflichen Materials, wodurch es schnell in weiten Kreisen Eingang und Anerkennung sich verschafft hat. Die jüngst in Berlin erschienene deutsche Uebersetzung dieses werthvollen Buches ist ohne Zweifel den deutschen Mathematikern sehr willkommen. Dass ich den Muth hatte, meine Schrift über denselben Gegenstand zu vollenden, gründet sich hauptsächlich auf die Verschiedenheit in der Anlage und Ausführung meiner Arbeit. Um den theoretischen Kern des Gegenstandes möglichst rein herauszuschälen, habe ich die Haupteigenschaften der Determinanten und die darauf gegründeten Algorithmen in synthetisch genau articulirtem Vortrag, wie er den Lehrbüchern von Alters her eignet, abgehandelt, und wo es nöthig schien, durch einfache Beispiele erläutert. Es kann zur klaren Einsicht in die Lehrsätze eines Systems nur erwünscht sein, bei jedem Lehrsatze die Summe der Prämissen, auf denen er beruht, straff zusammengezogen zu sehen. Dagegen habe ich die Anwendungen auf Algebra, Analysis und Geometrie in einen besondern Ab-

schnitt vereinigt, um durch grösseren Zusammenhang leichtere Auffassung und in den einzelnen Materien eine gewisse Vollständigkeit erreichen zu können. Besonders aber wünschte ich meiner Arbeit dadurch einigen Werth zu verleihen, dass ich soviel als möglich bis zu den Originalquellen vorzudringen suchte, um die ersten Erfinder von Methoden und die ersten Entdecker von Lehrsätzen citiren zu können. Solche Citate sind nicht nur ein Opfer, welches die spätere Zeit den frühern Offenbarungen des Genius schuldet, sie bilden ein Stück Geschichte der Wissenschaft und laden zum Studium der hohen Werke ein, aus denen die Wissenschaft aufgebaut ist, und in denen noch immer reiche Schätze ungehoben ruhen. Freilich kann ich nicht erwarten, dass mein Suchen hierbei überall zum Finden des Richtigen geführt hat; ich hoffe aber, dass verlautete Irrthümer zu gelegentlicher Aussprache des Richtigen Veranlassung geben werden.

Nach dem Vorbemerkten ist es unnöthig hervorzuheben, was von meiner Seite eigenes dem vorgefundenen Material hinzugefügt worden ist. Es bleibt mir nur übrig, die Güte meines gelehrten Freundes Borchardt dankbar zu rühmen, der durch mancherlei Anweisung mich bei meiner Arbeit wirksam unterstützt hat.

1857.

Vorrede zur fünften Auflage.

Die fünfte Auflage dieses Buches hat an vielen Stellen, namentlich §§. 2, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17 Verbesserungen und Zusätze erhalten, die ich den Freunden meines Buches zu geneigter Beachtung zu empfehlen mir erlaube. Zur besondern Zierde gereichen der neuen Auflage die Beiträge, welche ich meinem verehrten Freund Kronecker verdanke: die Subdeterminantenformel §. 7, 4 und deren Verwendung zur Jacobi'schen Transformation einer bilinearen Form §. 14, 11; das Theorem über symmetrische Functionen §. 10, 21 und seine Verwendung bei der Rosenhain'schen interpolatorischen Resultante §. 11, 17; der Zusatz §. 13, 15 und der Beweis §. 14, 13, V; und am Schluss

das algebraische Problem, unter den positiven ternären quadratischen Formen, welche gewissen Bedingungen genügen, die Form mit grösster Determinante zu bestimmen. Die correcte Herstellung des Druckes ist von Herrn Dr. P. Weinmeister in Leipzig mit grosser Sorgfalt überwacht worden, wofür ich demselben zugleich im Namen der Verlagshandlung meinen besten Dank ausspreche.

Inhalt.

Theorie der Determinanten.

Anwendungen der Determinanten.

Erster Abschnitt.

Theorie der Determinanten.

---

§. 1. Eintheilung der Permutationen gegebener Elemente in zwei Classen.

1. Die Elemente einer Complexion, aus welcher Permutationen abgeleitet werden sollen, werden durch Ordnungszahlen unterschieden. Ein Element heisst höher als ein anderes, wenn es die grössere Ordnungszahl hat. Bei einer abgeleiteten Complexion vergleicht man jedes Element mit allen folgenden und zählt, wievielmal einem höhern Elemente ein niederes nachsteht; die gefundene Anzahl heisst die Anzahl der Inversionen (dérangements, variations), welche die Complexion enthält*), z. B. die Permutation $a_2 a_4 a_3 a_1$ enthält 4 Inversionen: $a_2 a_1$, $a_4 a_3$, $a_4 a_1$, $a_3 a_1$.

Die Permutationen gegebener Elemente sind von CRAMER in zwei Classen getheilt worden, deren erste die Permutationen umfasst, in welchen eine gerade Anzahl von Inversionen vorhanden ist, deren zweite die Permutationen mit ungerader Anzahl von Inversionen enthält.

2. Lehrsatz. Wenn in einer Permutation ein Element mit einem andern vertauscht wird, während die übrigen Elemente ihre Plätze behalten, so ändert sich die Anzahl der vorhandenen Inversionen um eine ungerade Zahl**).

Beweis. Wenn ein Element mit einem Nachbar vertauscht

---

*) CRAMER Analyse des lignes courbes, 1750. Appendix p. 658.

**) Dieser Satz wurde zur Unterscheidung der Permutationen von BÉZOUT aufgestellt (Hist. de l'acad. de Paris 1764 p. 292) und von LAPLACE bewiesen in derselben Sammlung 1772, II p. 294, einfacher von MOLLWEIDE demonstratio eliminationis Cramerianae, Leipzig 1811 § 9 und von GERGONNE Ann. de Math. 4 p. 150.

wird, so ändert sich die Anzahl der vorhandenen Inversionen um 1. Um das Element g mit dem durch k rechts folgende Elemente getrennten Element h zu vertauschen, kann man zuerst g mit dem rechten Nachbar $(k+1)$mal, dann h mit dem linken Nachbar $k$mal vertauschen. Dabei ändert sich die Anzahl der vorhandenen Inversionen $(2k+1)$mal um 1, und wird ungeradmal aus einer geraden Zahl eine ungerade, aus einer ungeraden eine gerade Zahl. Also ändert sich bei der Vertauschung von g und h die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl.

3. Durch Vertauschung von jedesmal 2 Elementen können nach und nach alle Permutationen einer gegebenen Complexion dargestellt werden*). Die in dieser Reihe der Permutationen anzutreffenden Inversionen sind abwechselnd von gerader und von ungerader Anzahl (2). Da die Anzahl aller Permutationen gerade ist, so giebt es ebensoviel (gerade) Permutationen der einen Classe, in denen eine gerade Anzahl Inversionen vorhanden ist, als (ungerade) Permutationen der andern Classe, welche eine ungerade Anzahl Inversionen enthalten. Die einen lassen sich durch eine gerade, die andern durch eine ungerade Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen aus der gegebenen Complexion ableiten.

Zwei Permutationen gehören in dieselbe Classe, wenn eine aus der andern oder beide aus einer dritten durch eine gerade Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen sich ableiten lassen.

4. Analytischer Beweis des Lehrsatzes (2)**). Zur Unterscheidung der Permutationen bilde man bei jeder derselben die Differenzen der den Elementen zugehörigen Ordnungszahlen, indem man die Ordnungszahl jedes Elements von der jedes folgenden Elements subtrahirt. Eine Permutation enthält soviel Inversionen, als unter den erwähnten Differenzen negative vorkommen (1).

Das Product dieser Differenzen ist eine alternirende Function der Ordnungszahlen***), welche

*) Vergl. Gallenkamp Elem. d. Math. 1850 §. 110 und des Verf. Elem. d. Math. 2tes Buch §. 24.

**) Jacobi Determ. 2 (Crelle J. 22 no. 11).

***) Fonction alternée nach Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17. p. 30, Analyse algébr. III, 2. — Functio alternans nach Jacobi Crelle J. 22 p. 360.

durch Vertauschung von 2 Ordnungszahlen den entgegengesetzten Werth erhält.

Beweis. Nach der Vertauschung von zwei Ordnungszahlen haben die einzelnen Differenzen in veränderter Ordnung dieselben absoluten Werthe wie vorher, also behält ihr Product seinen absoluten Werth. Versteht man unter i und k zwei bestimmte, unter r und s zwei beliebige andere Ordnungszahlen; unter

$$\Pi(r-i)(r-k),\quad \Pi(r-s)$$

die Producte aller Factoren, deren allgemeine Formeln

$$(r-i)(r-k),\quad r-s$$

sind, bezeichnet man endlich eine der Einheiten 1 oder -1 durch ε, so wird das Product der bei einer gegebenen Permutation zu bildenden Differenzen durch

$$\varepsilon(k-i)\,\Pi(r-i)(r-k)\,\Pi(r-s)$$

ausgedrückt. Wird nun i mit k vertauscht, so bleiben

$$\Pi(r-i)(r-k) \text{ und } \Pi(r-s)$$

unverändert, und $k-i$ erhält den entgegengesetzten Werth. Also bekommt das Product den entgegengesetzten Werth, w. z. b. w.

Da durch Vertauschung von 2 Elementen der Permutation das in Betracht gezogene Product einen Zeichenwechsel erleidet, so ändert sich zugleich die Anzahl der negativen Differenzen, mithin die Anzahl der vorhandenen Inversionen, um eine ungerade Zahl, wie oben bewiesen worden.

5. Die Vertauschung der Elemente einer Complexion heisst cyclisch, wenn jedes Element durch das folgende, das letzte Element durch das erste ersetzt wird.

Durch eine cyclische Vertauschung aller Elemente erhält man aus einer gegebenen Permutation eine Permutation derselben oder nicht derselben Classe, je nachdem die Anzahl der Elemente ungerade oder gerade ist. Denn die cyclische Vertauschung von n Elementen lässt sich durch Vertauschung des ersten Elements mit dem zweiten, dritten u. s. f., also durch $n-1$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen erreichen.

Aus einer gegebenen Permutation kann jede andere durch cyclische Vertauschung einzelner Gruppen von Elementen abgeleitet werden. Sind z. B.

7 2 5 4 3 8 1 6 9

die Ordnungszahlen der Elemente in der gegebenen Permutation, und

2 9 3 8 7 4 1 5 6

die Ordnungszahlen der Elemente in der abzuleitenden Permutation, so beginne man mit dem ersten umzustellenden Element der gegebenen Permutation, und ersetze der Reihe nach 7 durch 2, 2 durch 9, 9 durch 6, 6 durch 5, 5 durch 3, endlich 3 durch das Anfangs ausgestossene Element 7. Dadurch ist eine Gruppe von Elementen abgeschlossen und deren Placirung vollendet (293 . 7 . . 56). Hierauf ersetze man aus der Reihe der noch übrigen Elemente 4 durch 8, 8 durch 4, womit die cyclische Vertauschung einer zweiten Gruppe von Elementen sich schliesst. Das noch übrige Element 1 ist durch ein anderes nicht zu ersetzen. Demnach ist durch 2 partiale cyclische Vertauschungen aus der ersten Permutation die zweite abgeleitet.

Wenn man jedes der Elemente, welches bei der eben beschriebenen Ableitung einer Permutation aus einer andern durch sich selbst zu ersetzen ist, als eine besondere Gruppe mitzählt, so gilt die Regel:

Zwei Permutationen gehören in dieselbe Classe oder nicht, je nachdem die Differenz der Anzahl ihrer Elemente und der Anzahl der Gruppen, durch deren cyclische Vertauschung aus der einen Permutation die andre abgeleitet werden kann, gerade ist oder ungerade*). Bestehen nämlich die gegebenen Permutationen aus n Elementen, lässt sich aus der ersten die zweite dadurch ableiten, dass man die Elemente in p Gruppen von α_1, α_2, α_3, . . Elementen vertheilt, und die einzelnen Gruppen durch cyclische Vertauschungen umbildet, so können die vorzunehmenden cyclischen Vertauschungen durch

$$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + (\alpha_3 - 1) + \ldots$$

Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen bewirkt werden. Nun ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = n$$

*) Cauchy 1815 J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 42. Anal. algébr. Note 4. Vergl. Jacobi Det. 3.

also kann die zweite Permutation aus der ersten durch $n-p$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen abgeleitet werden.

Um die Elemente der ersten Gruppe an ihre neuen Plätze zu bringen, sind nicht weniger als $\alpha_1 - 1$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen erforderlich u. s. f., daher kann eine der gegebenen Permutationen aus der andern nicht durch weniger als $n-p$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen abgeleitet werden. In dem obigen Beispiel ist $p = 3$, $n-p = 6$, folglich gehören die gegebenen Permutationen derselben Classe an.

§. 2. Determinante eines Systems von n^2 Elementen.

1. Wenn m Zeilen (Horizontalreihen, lignes) von je n Elementen, oder von der andern Seite betrachtet n Colonnen (Verticalreihen) von je m Elementen zu unterscheiden sind, so werden die Elemente im Allgemeinen zweckmässig durch 2 Nummern (indices, suffixe) bezeichnet, deren erste die Zeile, deren zweite die Colonne des Elements angiebt*), z. B.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\ \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot\ \cdot & a_{mn} \end{matrix}$$

Das Element a_{ik}, dessen Zeilen-Nummer i und dessen Colonnen-Nummer k ist, wird auch durch $a_i^{(k)}$ oder (ik) bezeichnet. Das System heisst defectiv, wenn $m < n$, excessiv, wenn $m > n$. Wenn $m = n$, so heisst die Reihe der Elemente vom ersten zum letzten

$$a_{11} \quad a_{22} \quad \cdot\ \cdot \quad a_{nn}$$

die Diagonalreihe des Quadrats der Elemente.

2. I. **Definition.** Unter der Determinante des Systems von n^2 Elementen, welche in bestimmter Ordnung in n Reihen von je n Elementen gegeben sind, versteht man ein bestimmtes Aggregat aller Producte von je n solchen Elementen, deren

*) Diese topographische Bezeichnung ist zuerst von Leibniz angewandt worden. S. dessen Brief an L'Hôpital 1693 April 28 und Acta Erud. 1700 p. 200 (Leibniz math. Schriften herausgeg. von Gerhardt II p. 239, V p. 348).

nicht zwei einer Zeile oder einer Colonne angehören. Wenn $fgh\,..$ eine Permutation der Colonnen-Nummern $1\,..\,n$ ist, die eine gerade oder eine ungerade Menge von Inversionen enthält (§. 1, 3), und wenn demgemäss ε die positive oder die negative Einheit bedeutet, so ist das Product der n Elemente

$$\varepsilon a_{1f}\, a_{2g}\, a_{3h}\, ..$$

ein Glied der Determinante R. Alle Glieder von R werden gebildet, indem man für $fgh\,..$ alle Permutationen der Colonnen-Nummern setzt, und bei jeder Permutation ε bestimmt; dann ist

$$R = \Sigma\, \varepsilon a_{1f}\, a_{2g}\, a_{3h}\, ..$$

Insbesondere ist das Product der diagonalen Elemente $a_{11}\,..\,a_{nn}$ ein Glied von R, das Anfangsglied der Determinante.

II. Wenn $\varepsilon a_{1f}\, a_{2g}\, a_{3h}\, ..$ ein Glied von R ist, so ist auch

$$-\varepsilon a_{1g}\, a_{2f}\, a_{3h} \quad \text{oder} \quad -\varepsilon a_{2f}\, a_{1g}\, a_{3h}\, ..$$

ein Glied von R, weil $gfh\,..$ und $fgh\,..$ Permutationen nicht einer Classe sind. Daher können alle Glieder von R auch dadurch gebildet werden, dass man bei festen Colonnen-Nummern $fgh\,..$ für die Zeilen-Nummern $1\,..\,n$ alle Permutationen der letztern setzt. Wenn nun $fgh\,..$ und $rst\,..$ Permutationen von $1\,..\,n$ einer Classe oder nicht einer Classe sind, und wenn demgemäss 1 oder -1 für ε gesetzt wird, so ist

$$\varepsilon a_{rf}\, a_{sg}\, a_{th}\, ..$$

ein Glied der Determinante.

Wenn alle n^2 Elemente mit bestimmten Potenzen einer gegebenen Zahl multiplicirt werden, a_{ik} mit p^{i-k}, so bleibt jedes Glied der Determinante unverändert (Fürstenau Borchardt J. 89 p. 88). Denn $\varepsilon a_{rf}\, a_{sg}\, a_{th}\, ..$ wird multiplicirt mit einer Potenz von p, deren Exponent

$$r-f+s-g+t-h+\,..\, = 0$$

in Betracht dass

$$r+s+t+\,..\, = 1+2+3+\,..\, = f+g+h+\,..$$

III. Die Determinante eines Quadrats von n^2 Elementen ist eine Form $n$ten Grades der Elemente, und heisst desshalb

$n$ten Grades. Sie hat $n! = 1.2\ldots n$ Glieder, welche zur Hälfte $\varepsilon = 1$, zur andern Hälfte $\varepsilon = -1$ haben (§. 1, 3), unter denen gleiche oder entgegengesetzt gleiche nicht vorkommen, so lange nicht besondere Beziehungen zwischen den einzelnen Elementen stattfinden. Man bezeichnet die Determinante nach Cauchy (und Jacobi) durch das mit dem Doppelzeichen $\pm$ unter ein Summenzeichen gesetzte Anfangsglied, oder nach Vandermonde durch Aufstellung der Reihe der ersten Nummern, welche zur Unterscheidung der Elemente dienen, über der Reihe der zweiten Nummern, oder nach Cayley durch Einschliessung des Quadrats der Elemente zwischen Colonnenstriche*):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn} = \frac{1\,|\,2\,|\ldots|\,n}{1\,|\,2\,|\ldots|\,n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1 b$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = ab_1c_2 - ab_2c_1 + a_1b_2c - a_1bc_2 + a_2bc_1 - a_2b_1c$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} ab_1c_2d_3 - ab_1c_3d_2 + ab_2c_3d_1 - ab_2c_1d_3 + ab_3c_1d_2 - ab_3c_2d_1 \\ - a_1bc_2d_3 + a_1bc_3d_2 + a_1b_2cd_3 - a_1b_2c_3d - a_1b_3cd_2 + a_1b_3c_2d \\ + a_2bc_1d_3 - a_2bc_3d_1 - a_2b_1cd_3 + a_2b_1c_3d + a_2b_3cd_1 - a_2b_3c_1d \\ - a_3bc_1d_2 + a_3bc_2d_1 + a_3b_1cd_2 - a_3b_1c_2d - a_3b_2cd_1 + a_3b_2c_1d \end{array}$$

---

*) Cauchy J. de l'école polyt. Cah. 17 p. 52. Jacobi Det. 4 und Crelle J. 15 p. 115. Vandermonde Mém. sur l'élimination 1771 (Hist. de l'acad. de Paris 1772, II p. 517). Cayley Cambridge math. J. 1841 t. 2 p. 267. Die Determinanten sind von Leibniz (l. c.) erfunden worden, der mit Hülfe derselben die Resultante von n linearen Gleichungen für $n-1$ Unbekannte, sowie die Resultante von 2 algebraischen Gleichungen für eine Unbekannte darzustellen suchte. Als zweiter Erfinder der Determinanten ist Cramer (vergl. §. 1, 1) zu nennen. Die von Cauchy eingeführte Benennung Determinante ist von den nach dem obigen Gesetz gebildeten Aggregaten hergenommen, welche Gauss (Disquis. arithm.) Determinanten der quadratischen Formen genannt hat. Später hat Cauchy (Exerc. de Math., Exerc. d'Analyse) den Namen Determinante wieder mit fonction alternée und mit dem von Laplace (vergl. §. 1, 2) gebrauchten Ausdruck Resultante vertauscht.

3. I. Zwei Quadrate der Art, dass die Zeilen des einen mit den Colonnen des andern übereinstimmen,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & . & . & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & . & . & a_{n2} \\ . & . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & . & . & a_{nn} \end{matrix}$$

haben dieselbe Determinante $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \, .. \, a_{nn}$. Denn das Glied $\varepsilon a_{fr}\, a_{gs}\, a_{ht} \, ..$ der Determinante des einen Quadrats ist ein Glied desselben Zeichens der Determinante des andern Quadrats (2).

II. Wenn im Quadrat der Elemente zwei parallele Reihen vertauscht werden, so wechselt die Determinante das Zeichen*). Es sei

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = \Sigma\, \varepsilon a_{1f}\, a_{2g}\, a_{3h} \, ..$$

und nach Vertauschung der ersten Zeile des Systems mit der zweiten

$$R' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & . \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & . \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = \Sigma\, \varepsilon a_{2f}\, a_{1g}\, a_{3h} \, ..$$

Ein Glied von R' ist $-\varepsilon a_{2g}\, a_{1f}\, a_{3h} \, ..$, also hat man

$$R' = -\Sigma\, \varepsilon a_{1f}\, a_{2g}\, a_{3h} \, .. = -R$$

Ebenso bei Vertauschung von Colonnen.

III. Wenn zwei parallele Reihen des Quadrats übereinstimmen, so ist die Determinante des Quadrats identisch null. Denn man hat sowohl $R = -R'$, als auch $R = R'$, also $R = 0$ für alle Werthe der Elemente.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & . & . & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & . & . & a_{2n} & a_{21} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n2} & . & . & a_{nn} & a_{n1} \\ a_{12} & . & . & a_{1n} & a_{11} \end{vmatrix}$$

*) Vandermonde l. c. p. 518 u. 522. Laplace Hist. de l'acad. de Paris 1772, II p. 297.

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} & a_{11} \\ a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} & a_{21} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} & a_{n1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdot & \cdot & a_{11} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{nn} & a_{n,n-1} & \cdot & \cdot & a_{n1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Ueberhaupt: wenn ikl .. und rst .. gegebene Permutationen von 123 .. bedeuten, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{ir} & a_{is} & a_{it} & \cdot \\ a_{kr} & a_{ks} & a_{kt} & \cdot \\ a_{lr} & a_{ls} & a_{lt} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{ri} & a_{rk} & a_{rl} & \cdot \\ a_{si} & a_{sk} & a_{sl} & \cdot \\ a_{ti} & a_{tk} & a_{tl} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

wo ε die positive oder die negative Einheit bedeutet, je nachdem die gegebenen Permutationen einer Classe angehören oder nicht.

4. Wenn man von dem System der n^2 Elemente m Zeilen auswählt und von diesen ebensoviel Colonnen, so erhält man ein partiales System von m^2 Elementen, dessen Determinante eine Subdeterminante $m$ten Grades des gegebenen Systems heisst*). Es giebt $\binom{n}{m}$ Subdeterminanten $m$ten Grades einer Zeilen-Combination, $\binom{n}{m}^2$ des Systems, und ebensoviel Subdeterminanten $(n-m)$ten Grades. Demnach kommen bei dem gegebenen System in Betracht ausser der Determinante $n$ten Grades

n^2 Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades

$\binom{n}{2}^2$ Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades

u. s. w. Die Subdeterminanten 1ten Grades sind die einzelnen Elemente.

Nachdem man die Combinationen $m$ten Grades der Zeilen-Nummern und der Colonnen-Nummern beliebig durch die Zahlen

---

*) Dét. d'un système dérivé bei Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 96, partiale Determinante, Unterdeterminante bei den deutschen, minor determinant bei den englischen Mathematikern.

1 bis $\mu = \binom{n}{m}$ nummerirt hat, bezeichne man durch p_{ik} die Determinante des partialen Systems, dessen Elemente der *i*ten Zeilen-Combination und der *k*ten Colonnen-Combination angehören. Dann ist

$$\begin{matrix} p_{11} & . & . & p_{1\mu} \\ . & . & . & . \\ p_{\mu 1} & . & . & p_{\mu\mu} \end{matrix}$$

das System der Subdeterminanten *m*ten Grades, welche zu dem gegebenen System von Elementen gehören. Z. B. $n = 4$, $m = 2$,

$$\mu = 6, \quad \underbrace{12}_{1} \quad \underbrace{13}_{2} \quad \underbrace{14}_{3} \quad \underbrace{23}_{4} \quad \underbrace{24}_{5} \quad \underbrace{34}_{6}$$

$$p_{25} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

5. Zwei Subdeterminanten eines Systems von n^2 Elementen, deren Grade sich zu n ergänzen,

$$\Sigma \pm a_{\alpha f}\, a_{\beta g} \,..\, \text{ und } \varepsilon\, \Sigma \pm a_{\varrho t}\, a_{\sigma u} \,..$$

heissen adjungirt, eine die Adjuncte der andern,

$$\text{adj } \Sigma \pm a_{\alpha f}\, a_{\beta g} \,..\, = \varepsilon\, \Sigma \pm a_{\varrho t}\, a_{\sigma u} \,..$$
$$\text{adj } \Sigma \pm a_{\varrho t}\, a_{\sigma u} \,..\, = \varepsilon\, \Sigma \pm a_{\alpha f}\, a_{\beta g} \,..$$

wenn das Product $\varepsilon a_{\alpha f}\, a_{\beta g} \,..\, a_{\varrho t}\, a_{\sigma u} \,..$ ein Glied der Determinante $\Sigma \pm a_{11} \,..\, a_{nn}$ ist (2). Insbesondere sind ein Element und eine bestimmte Subdeterminante $(n-1)$ten Grades adjungirt, die Adjuncte des Elements a_{ik} wird durch α_{ik} bezeichnet*). In dem System

$$\begin{matrix} a_{11} & . & . & a_{15} \\ . & . & . & . \\ a_{51} & . & . & a_{55} \end{matrix}$$

sind adjungirt

$$\Sigma \pm a_{22}\, a_{33}\, a_{44}\, a_{55} \text{ und } a_{11}$$
$$\Sigma \pm a_{33}\, a_{44}\, a_{55} \text{ und } \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}$$

---

*) CAUCHY l. c. p. 64 hat diese Benennung aus der Theorie der quadratischen Formen (GAUSS Disq. arithm. 267) aufgenommen und adjungirte Subdeterminanten complementär genannt.

$$a_{34} \text{ und } a_{34} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{25} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} & a_{53} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{15} & a_{12} \\ a_{35} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

weil 3|1245 und 4|1253, 13|245 und 52|134 Permutationen derselben Classe der Reihen-Nummern des Systems sind.

In dem System

$$\begin{matrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{matrix} \quad \text{hat } a \text{ die Adjuncte} \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Die Elemente a_1, b haben dieselben Adjuncten, wie in den Systemen mit derselben Determinante (3)

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a \\ b_1 & b_2 & b \\ c_1 & c_2 & c \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \\ a & a_1 & a_2 \end{matrix}$$

nämlich

$$\begin{vmatrix} b_2 & b \\ c_2 & c \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

In dem System

$$\begin{matrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix} \quad \text{hat } a \text{ die Adjuncte} \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Die Elemente a_1, b haben die entgegengesetzt gleichen Adjuncten, wie in den Systemen mit entgegengesetzt gleicher Determinante (3)

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a \\ b_1 & b_2 & b_3 & b \\ c_1 & c_2 & c_3 & c \\ d_1 & d_2 & d_3 & d \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \\ a & a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix}$$

nämlich

$$-\begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b \\ c_2 & c_3 & c \\ d_2 & d_2 & d \end{vmatrix} \qquad -\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Adjungirte Systeme sind

$$\begin{matrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ . & ... & . \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha_{11} & .. & \alpha_{1n} \\ . & ... & . \\ \alpha_{n1} & .. & \alpha_{nn} \end{matrix}$$

wenn α_{ik} die Adjuncte des Elements a_{ik} bedeutet; ferner

$$\begin{matrix} p_{11} & .. & p_{1\mu} \\ . & ... & . \\ p_{\mu 1} & .. & p_{\mu\mu} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} q_{11} & .. & q_{1\mu} \\ . & ... & . \\ q_{\mu 1} & .. & q_{\mu\mu} \end{matrix}$$

wenn p_{ik} und q_{ik} adjungirte Subdeterminanten des Systems

$$\begin{matrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ . & ... & . \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{matrix}$$

6. Das Product der adjungirten Subdeterminanten $m$ten und $(n-m)$ten Grades

$$\varepsilon \Sigma \pm a_{\alpha f} a_{\beta g} .. \Sigma \pm a_{\varrho t} a_{\sigma u} ..$$

hat $m!(n-m)!$ Glieder, welche Glieder der Determinante

$$R = \Sigma \pm a_{11} .. a_{nn}$$

sind. Das Anfangsglied des Products

$$\varepsilon a_{\alpha f} a_{\beta g} .. a_{\varrho t} a_{\sigma u} ..$$

ist ein Glied von R (5). Die Glieder $-a_{\beta f} a_{\alpha g} ..$ und $a_{\varrho t} a_{\sigma u} ..$ der beiden Subdeterminanten geben das Glied $-\varepsilon a_{\beta f} a_{\alpha g} .. a_{\varrho t} a_{\sigma u} ..$ des Products, ein Glied von R, weil $\beta\alpha .. \varrho\sigma ..$ und $\alpha\beta .. \varrho\sigma ..$ Permutationen nicht derselben Classe der Zeilen-Nummern des Systems sind. U. s. w.

Daher sind die Glieder von R, welche die Elemente $a_{\alpha f}$, $a_{\beta g}$, .. enthalten, in der Formel

$$a_{\alpha f} a_{\beta g} .. \varepsilon \Sigma \pm a_{\varrho t} a_{\sigma u} .. = a_{\alpha f} a_{\beta g} .. \times \operatorname{adj} \Sigma \pm a_{\alpha f} a_{\beta g} ..$$

vereinigt. Die Glieder von $\Sigma \pm a_{11} .. a_{55}$, welche das Element a_{34} enthalten, werden durch

$$a_{34} \alpha_{34} = a_{34} \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{45} a_{53}$$

ausgedrückt (5). Die Glieder, welche a_{15}, a_{32} enthalten, werden durch

$$a_{15} a_{32} \Sigma \pm a_{21} a_{43} a_{54}$$

ausgedrückt; die Glieder, welche a_{12}, a_{35} enthalten, werden durch

$$-a_{12}\,a_{35}\,\Sigma\pm a_{21}\,a_{43}\,a_{54} = a_{12}\,a_{35}\,\Sigma\pm a_{23}\,a_{41}\,a_{54}$$

ausgedrückt. U. s. w.

§. 3. Entwickelung der Determinante nach den in einer Reihe stehenden Elementen.

1. Aus zwei gegebenen Systemen

$$\begin{array}{lll} a_{11} & .\,. & a_{1n} \\ a_{21} & .\,. & a_{2n} \\ . & .\,.\,. & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} b_{11} & .\,. & b_{1n} \\ b_{21} & .\,. & b_{2n} \\ . & .\,.\,. & \end{array}$$

wird ein drittes System

$$\begin{array}{lll} a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{12} + .\,. + a_{1n}\,b_{1n} & a_{11}\,b_{21} + a_{12}\,b_{22} + .\,. + a_{1n}\,b_{2n} & \ldots \\ a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{12} + .\,. + a_{2n}\,b_{1n} & a_{21}\,b_{21} + a_{22}\,b_{22} + .\,. + a_{2n}\,b_{2n} & \ldots \\ .\quad .\quad . & .\quad .\quad . & \ldots \end{array}$$

componirt (durch Composition ihrer Zeilen formirt), indem man die Elemente je einer Zeile des ersten Systems mit den Elementen je einer Zeile des andern Systems der Reihe nach multiplicirt und durch Addition der Producte je ein Element des componirten Systems bildet. Die Elemente des componirten Systems sind bilineare Formen der Elemente a und der Elemente b. Z. B. aus den Systemen

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \end{array}$$

wird das System componirt

$$\begin{array}{ll} ax + by + c & ax' + by' + c \\ a'x + b'y + c' & a'x' + b'y' + c' \end{array}$$

2. Wenn $R = \Sigma\pm a_{11}\,.\,.\,a_{nn}$ und α_{ik} die Adjuncte des Elements a_{ik} ist, wenn demnach

$$\begin{array}{lll} a_{11} & .\,. & a_{1n} \\ . & .\,.\,. & \\ a_{n1} & .\,. & a_{nn} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \alpha_{11} & .\,. & \alpha_{1n} \\ . & .\,.\,. & \\ \alpha_{n1} & .\,. & \alpha_{nn} \end{array}$$

adjungirte Systeme sind (§. 2, 5), so findet man durch Composition einer Zeile (Colonne) des einen Systems mit einer Zeile (Colonne) des andern Systems entweder R oder 0, je nachdem

man Reihen derselben Nummer oder nicht derselben componirt. Die Determinante ist eine lineare Form der Elemente einer Reihe*).

Beweis. Die Glieder der Determinante enthalten je eines der Elemente a_{i1}, a_{i2}, .. einer Zeile, sowie je eines der Elemente a_{1k}, a_{2k}, .. einer Colonne. Die Glieder der Determinante, welche das Element a_{ik} enthalten, werden durch $a_{ik}\,\alpha_{ik}$ ausgedrückt (§. 2, 6). Also umfasst die Summe

$$a_{i1}\,\alpha_{i1} + \ldots + a_{in}\,\alpha_{in} \quad \text{oder} \quad a_{1k}\,\alpha_{1k} + \ldots + a_{nk}\,\alpha_{nk}$$

alle Glieder von R, jedes einfach. Demnach ist

$$a_{k1}\,\alpha_{i1} + \ldots + a_{kn}\,\alpha_{in} \quad \text{oder} \quad a_{1i}\,\alpha_{1k} + \ldots + a_{ni}\,\alpha_{nk}$$

die Determinante des Systems, welches aus dem gegebenen dadurch abgeleitet wird, dass man die Elemente a_{i1}, a_{i2}, .. durch a_{k1}, a_{k2}, .. oder die Elemente a_{1k}, a_{2k}, .. durch a_{1i}, a_{2i}, .. ersetzt. Die Zeilen (Colonnen) dieses Systems sind nicht alle von einander verschieden, also ist die Determinante dieses Systems null (§. 2, 3).

Man schreibt abkürzend

$$\sum_r a_{ir}\,\alpha_{kr} = \sum_r a_{ri}\,\alpha_{rk} = |\,a_{ik}\,|\,\delta_{ik}$$

wo i, k bestimmte Zeilen-Nummern oder bestimmte Colonnen-Nummern bedeuten, und für r alle Colonnen-Nummern oder alle Zeilen-Nummern gesetzt werden. Dabei ist $\delta_{ik} = 0$ oder 1, je nachdem k und i verschieden oder gleich sind, und $|\,a_{ik}\,|$ die Determinante R. Kronecker Crelle J. 72 p. 152.

Beispiele. Wenn die Systeme

$$\begin{matrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix}$$

adjungirt sind, wenn R die Determinante des ersten Systems, α die Adjuncte des Elements a, u. s. w.

$$\alpha = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \quad \alpha_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b \\ c_2 & c \end{vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}$$

$$\beta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}. \quad \beta_1 = \begin{vmatrix} c_2 & c \\ a_2 & a \end{vmatrix} \quad \beta_2 = \begin{vmatrix} c & c_1 \\ a & a_1 \end{vmatrix}$$

---

*) Cramer l. c. Lagrange Pyram. 7 (Mém. de Berlin 1773). Cauchy l. c. p. 66. Jacobi Det. 6.

$$\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \gamma_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a \\ b_2 & b \end{vmatrix} \qquad \gamma_2 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix}$$

so findet man

$$\begin{aligned} a\alpha + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 &= R & \qquad a\alpha + b\beta + c\gamma &= R \\ b\alpha + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 &= 0 & a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma &= 0 \\ c\alpha + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 &= 0 & a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. Zur Ausrechnung der Determinante genügt eine Zeile (Colonne) der Adjuncten.

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b \\ c_2 & c_3 & c \\ d_2 & d_3 & d \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b & b_1 \\ c_3 & c & c_1 \\ d_3 & d & d_1 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \\ d & d_1 & d_2 \end{vmatrix}$$

3. Wenn alle Elemente einer Reihe des gegebenen Systems null sind, so ist die Determinante des Systems null. Wenn unter den Elementen einer Reihe nur eines nicht null ist, so ist die Determinante das Product dieses Elements mit seiner Adjuncte; die übrigen Glieder der Determinante fallen weg.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = (-1)^4 c_2 \begin{vmatrix} a & a_1 & a_3 \\ b & b_1 & b_3 \\ d & d_1 & d_3 \end{vmatrix}$$

Bei der Vertauschung der 3ten Zeile des Systems mit den vorhergehenden Zeilen und der 3ten Colonne mit den vorhergehenden wechselt die Determinante 4mal das Zeichen. In dem System

$$\begin{matrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix} \quad \text{ist adj } c_2 = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & 0 & a_3 \\ b & b_1 & 0 & b_3 \\ c & c_1 & 1 & c_3 \\ d & d_1 & 0 & d_3 \end{vmatrix}$$

Wenn alle Elemente einerseits der Diagonale null sind, so bleibt nur das Anfangsglied der Determinante übrig.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . \\ 0 & a_{22} & a_{23} & . \\ 0 & 0 & a_{23} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & . \\ 0 & a_{33} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots$$

Umgekehrt: Wenn dem gegebenen System der Rand

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & . \\ x & & & \\ y & & & \\ . & & & \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{cccc} 1 & x & y & . \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ . & & & \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{cccc} & & & . \\ & & & y \\ & & & x \\ . & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{cccc} & & & . \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ . & y & x & 1 \end{array}$$

zugesetzt wird, so bleibt seine Determinante unverändert. Eine Determinante $n$ten Grades kann als Determinante $(n+1)$ten Grades mit n beliebigen Elementen dargestellt werden.

$$\begin{vmatrix} a & a' & . \\ b & b' & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y & . \\ 0 & a & a' & . \\ 0 & b & b' & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

4. Um eine Determinante mit einem Factor zu multipliciren, hat man alle Elemente einer Reihe mit demselben zu multipliciren. Den gemeinschaftlichen Factor aller Elemente einer Reihe kann man vor die Determinante setzen.

$$p\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa & b & c \\ pa_1 & b_1 & c_1 \\ pa_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa & pb & pc \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Diess ergiebt sich, wenn die Determinante unter der Form $a\alpha + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$ oder $a\alpha + b\beta + c\gamma$ vorgestellt wird. Ferner ist

$$-\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & b \\ -a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b_1 & c_1 \\ a & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c_1 \\ a & b & c_2 \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & c_1 \\ 1 & 1 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & pa & a_2 \\ b & pb & b_2 \\ c & pc & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Wenn die Elemente einer Colonne (Zeile) des Systems sich zu einander verhalten, wie die Elemente einer andern Colonne (Zeile), so ist die Determinante identisch null.

Man findet

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$$

indem man die erste Colonne mit $abcd$ multiplicirt, und die Zeilen durch a, b, c, d dividirt;

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix},$$

indem man die 3 letzten Zeilen mit abc multiplicirt, und dann die erste Colonne durch abc, die 2te, 3te, 4te Zeile und Colonne durch a, b, c dividirt.

5. Wenn in einem System von n^2 Elementen die Elemente, welche symmetrisch zur Diagonale stehn, z. B. a_{ik} und a_{ki} gleich sind oder entgegengesetzt gleich oder conjugirt complex, so haben die Determinanten $m$ten Grades von Systemen der Art, dass die Zeilen- und die Colonnen-Nummern des einen mit den Colonnen- und den Zeilen-Nummern des andern übereinstimmen,

$$P = \begin{vmatrix} a_{\alpha f} & a_{\alpha g} & . \\ a_{\beta f} & a_{\beta g} & . \\ . & . & \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} a_{f\alpha} & a_{f\beta} & . \\ a_{g\alpha} & a_{g\beta} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

unter einander einen einfachen Zusammenhang, z. B. die Adjuncte von a_{ik} und die Adjuncte von a_{ki}.

I. Wenn $a_{ki} = a_{ik}$, so ist

$$P = \begin{vmatrix} a_{f\alpha} & a_{g\alpha} & . \\ a_{f\beta} & a_{g\beta} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{f\alpha} & a_{f\beta} & . \\ a_{g\alpha} & a_{g\beta} & . \\ . & & . \end{vmatrix} = Q$$

(§. 2, 3). Insbesondere haben in diesem System, welches s y m m e t r i s c h genannt wird, a_{ik} und a_{ki} dieselbe Adjuncte.

II. Wenn $a_{ki} = -a_{ik}$ und $a_{ii} = 0$, so ist

$$P = \begin{vmatrix} -a_{f\alpha} & -a_{g\alpha} & . \\ -a_{f\beta} & -a_{g\beta} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = (-1)^m Q$$

Bei geradem m ist $P = Q$. Bei ungeradem n haben in diesem System, welches nach Cayley Crelle J. 32 p. 119 gauche, skew, gobbo genannt wird, a_{ik} und a_{ki} dieselbe Adjuncte. Bei ungeradem m ist $P = -Q$, bei geradem n haben a_{ik} und a_{ki} entgegengesetzt gleiche Adjuncten.

Wenn fg.. eine Permutation von $\alpha\beta$.. ist, so hat man (§. 2, 3)

$$P = \varepsilon\, \Sigma \pm a_{\alpha\alpha}\, a_{\beta\beta} \,..= Q$$

Bei ungeradem m ist also P identisch null*).

III. Wenn a_{ik} und a_{ki} conjugirt complex sind, und a_{ii} real, so geht durch Vertauschung von $\sqrt{-1}$ mit $-\sqrt{-1}$ die Determinante P über in Q d. h. P und Q sind conjugirt complex. Bei derselben Vertauschung bleibt $\Sigma \pm a_{\alpha\alpha}\, a_{\beta\beta}$.. unverändert, also ist diese Determinante real**).

6. Wenn die Elemente einer Reihe Aggregate von m Gliedern sind, so ist die Determinante das Aggregat von m Determinanten. Wenn z. B. $a_{i1} = p_i + q_i + ..$, so ist

$$R = \begin{vmatrix} p_1 + q_1 + .. & a_{12} & . \\ p_2 + q_2 + .. & a_{22} & . \\ . \; . \; . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & a_{12} & . \\ p_2 & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 & a_{12} & . \\ q_2 & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} + ..$$

weil (2)

$$\begin{aligned} R = a_{11}\,\alpha_{11} + a_{21}\,\alpha_{21} + .. = \;& p_1\,\alpha_{11} + q_1\,\alpha_{11} + .. \\ & + p_2\,\alpha_{21} + q_2\,\alpha_{21} + .. \\ & + .. \quad + .. \end{aligned}$$

Die einzelnen Determinanten, in welche R sich zerlegen lässt, entspringen aus R, indem an die Stelle der Elemente

$$a_{11} \quad a_{21} \quad .. \quad a_{n1}$$

die Glieder derselben

$$\begin{matrix} p_1 & p_2 & .. \\ q_1 & q_2 & .. \end{matrix}$$

u. s. w. der Reihe nach gesetzt werden. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a + a' & a_1 & a_2 \\ b + b' & b_1 & b_2 \\ c + c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & a_1 & a_2 \\ b' & b_1 & b_2 \\ c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & b' & b'' \\ 0 & c' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

---

*) Jacobi Crelle J. 2 p. 354.

**) Hermite Comptes rendus t. 41 p. 181. Crelle J. 52 p. 40.

7. Der Werth einer Determinante wird nicht verändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe die mit einem beliebigen gemeinschaftlichen Factor multiplicirten Elemente einer parallelen Reihe addirt*)

$$\begin{vmatrix} a+pb & b & c \\ a_1+pb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+pb_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} b & b & c \\ b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(vergl. 3. u. 2.), wovon die zweite Determinante identisch verschwindet (§. 2, 4).

Beispiele.
$$\begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & a_1 & b_1 & c_1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_4x+b_4y+c_4z & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0$$

Eine Colonne ist aus den andern componirt.

$$\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b \\ x_1-a & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-a & b-b \\ 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} \text{ (vergl. 3)}$$

$$\begin{vmatrix} a-x & a'-x & . \\ b-x & b'-x & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x-x & x-x & . \\ 1 & a-x & a'-x & . \\ 1 & b-x & b'-x & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x & . \\ 1 & a & a' & . \\ 1 & b & b' & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a' & . \\ b & b' & . \\ . & . & \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & a & a' & . \\ 1 & b & b' & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ab_1-a_1b & ab_2-a_2b \\ ac_1-a_1c & ac_2-a_2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & aa_1-a_1a & aa_2-a_2a \\ b & ab_1-a_1b & ab_2-a_2b \\ c & ac_1-a_1c & ac_2-a_2c \end{vmatrix} : a$$

$$= \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} a$$

*) Jacobi Crelle J. 22 p. 371.

$$\begin{vmatrix} u_1 - u_0 x & u_2 - u_1 x & . \\ u_2 - u_1 x & u_3 - u_2 x & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & u_0 & u_1 & . \\ 0 & u_1 - u_0 x & u_2 - u_1 x & . \\ 0 & u_2 - u_1 x & u_3 - u_2 x & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & u_0 & u_1 & . \\ x & u_1 & u_2 & . \\ x^2 & u_2 & u_3 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} \text{*)}$$

Die zweite Zeile wird transformirt, indem man die erste Zeile mit x multiplicirt addirt; die dritte Zeile wird transformirt, indem man die transformirte zweite Zeile mit x multiplicirt addirt; u. s. w.

Wenn man in der Determinante $n$ten Grades

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & . & . & a_n \\ b_1 & . & . & b_n \\ c_1 & . & . & c_n \\ . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

die $n$te Colonne mit a_{n-1} multiplicirt und dann von dieser Colonne die mit a_n multiplicirte vorhergehende Colonne subtrahirt; wenn man auf dieselbe Weise die $(n-1)$te, .. Colonne transformirt, so findet man

$$a_1 \; . \; . \; a_{n-1} S = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 a_2 - a_2 a_1 & . \; . & a_{n-1} a_n - a_n a_{n-1} \\ b_1 & a_1 b_2 - a_2 b_1 & . \; . & a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1} \\ c_1 & a_1 c_2 - a_2 c_1 & . \; . & a_{n-1} c_n - a_n c_{n-1} \\ . & . & . \; . & . \end{vmatrix}$$

und daher die Determinante $(n-1)$ten Grades

$$a_2 \; . \; . \; a_{n-1} S = \begin{vmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 & . \; . & a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1} \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 & . \; . & a_{n-1} c_n - a_n c_{n-1} \\ . & . \; . & . \end{vmatrix}$$

Wenn die Elemente ganze Zahlen sind, so kann die Determinante ohne Multiplication reducirt werden, indem man einzelne Reihen durch Verbindung mit parallelen Reihen transformirt, bis dass ein Element ± 1 geworden ist**).

$$\begin{vmatrix} 13 & 28 & 5 \\ 9 & 5 & 11 \\ 4 & 14 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -14 & -22 \\ 9 & 5 & 11 \\ 4 & 14 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 131 & 209 \\ 4 & 70 & 97 \end{vmatrix}$$

Von der 1ten Zeile wurde die 3te Zeile 3fach subtrahirt, zur

*) Jacobi Crelle J. 30 p. 129.

**) Vergl. Kronecker Berl. Monatsbericht 1866 p. 609.

2ten und 3ten Colonne wurde die 1te Colonne 14fach und 22fach addirt.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & & & \\ 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 16$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

ist durch $a+b+c+d$, $a-b-c+d$, $a-b+c-d$, $a+b-c-d$ theilbar, also auch durch das Product dieser Factoren. Der Quotient ist 1. Weiteres hierzu Puchta Abh. der Wiener Acad. 1878 p. 215.

Unter der Voraussetzung

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k \\ a'x + b'y + c'z &= k' \\ a''x + b''y + c''z &= k'' \end{aligned}$$

findet man

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} ax + by + cz & b & c \\ a'x + b'y + c'z & b' & c' \\ a''x + b''y + c''z & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & b & c \\ k' & b' & c' \\ k'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

abgekürzt

$$(abc)x = (kbc), \quad (abc)y = (akc), \quad (abc)z = (abk)$$

Wenn k, k', k'' null sind, so sind entweder x, y, z null oder $(abc) = 0$.

8. Wenn das System die Determinante 0 hat, so verhalten sich die Adjuncten einer Zeile (Colonne) zu einander, wie die Adjuncten jeder andern Zeile (Colonne)*). Die Determinanten der Systeme

---

*) Dieser Satz fliesst aus den algebraischen Bemerkungen Jacobi's Crelle J. 15 p. 104 und Det. 7.

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

werden durch $(abcd)$, (abc) bezeichnet, in dem ersten System hat a die Adjuncte α, u. s. w. Dann ist identisch

$$\begin{aligned} (acd)\alpha + (bcd)\beta &= (a\alpha + b\beta, c, d) \text{ nach (6)} \\ &= (a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta, c, d) \text{ nach (7)} \\ &= (abcd) \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \text{ nach (2 u. 3)} \\ (acd)\alpha_1 + (bcd)\beta_1 &= (abcd) \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c & d \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung $(abcd) = 0$ und (acd) nicht null, hat man daher $\beta_3\alpha - \alpha_3\beta = 0$, u. s. w.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = 0$$

Ueberhaupt sind für das System der Adjuncten

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{matrix}$$

alle Determinanten 2ten und höhern Grades null (4). Vergl. unten §. 7, 2 u. 7.

9. Indem man Determinanten, welche identisch null sind (7), nach den Elementen einer Reihe entwickelt (2), erhält man Identitäten von vielfältiger Anwendbarkeit.

$$(b-c)(a-d) + (c-a)(b-d) + (a-b)(c-d) = \begin{vmatrix} a-d & a & 1 \\ b-d & b & 1 \\ c-d & c & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{*)}$$

Bezeichnet man

$$\begin{vmatrix} a & a' & 1 \\ b & b' & 1 \\ c & c' & 1 \end{vmatrix}$$

durch (abc), so ist

*) Bézout Equat. algébr. 1779 §. 220.

$$(bcd)(a-d)+(cad)(b-d)+(abd)(c-d) = \begin{vmatrix} a-d & a & a' & 1 \\ b-d & b & b' & 1 \\ c-d & c & c' & 1 \\ d-d & d & d' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ferner ist bei beliebigen x, y, z

$$\begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & a_1 & b_1 & c_1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_4x + b_4y + c_4z & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0$$

Wenn nun

$$a_1x + b_1y + c_1z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_5 & b_5 & c_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 \end{vmatrix} = (156)$$

u. s. w., so erhält man durch Entwickelung der Determinante nach den Elementen der ersten Colonne

$$(234)(156) + (314)(256) + (124)(356) - (123)(456) = 0^{*)}$$

Dieselben Resultate ergeben sich auf folgendem Wege**). Aus den Systemen

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdot\;\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\;\cdot & a_{nn} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_{11} & \cdot\;\cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot\;\cdot & b_{nn} \end{matrix}$$

werden 2mal n Systeme abgeleitet, indem man im ersten System alle Colonnen der Reihe nach durch eine bestimmte Colonne i des zweiten Systems, und im zweiten System eine bestimmte Colonne k der Reihe nach durch alle Colonnen des ersten Systems ersetzt. Die Determinanten der gegebenen Systeme werden durch R und S bezeichnet, die Adjuncten der Elemente a_{ik} und b_{ik} durch α_{ik} und β_{ik}, die Determinanten der abgeleiteten Systeme durch t_{i1}, t_{i2}, .. und u_{1k}, u_{2k}, ... Dann ist

$$\begin{aligned} t_{i1} &= b_{1i}\alpha_{11} + b_{2i}\alpha_{21} + \cdot\cdot & \qquad u_{1k} &= a_{11}\beta_{1k} + a_{21}\beta_{2k} + \cdot\cdot \\ t_{i2} &= b_{1i}\alpha_{12} + b_{2i}\alpha_{22} + \cdot\cdot & \qquad u_{2k} &= a_{12}\beta_{1k} + a_{22}\beta_{2k} + \cdot\cdot \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

---

*) Die entsprechenden geometrischen Sätze hat Monge 1809 abgeleitet (J. de l'école polyt. Cah. 15 p. 68), auf andrem Wege Möbius baryc. Calcul §. 166 u. 171. Ihren Zusammenhang mit der Lehre von den Doppelverhältnissen findet man angegeben in des Verf. Elem. d. Math. VI §. 7, 12—13.

**) Sylvester Philos. Mag. 1851, II p. 142 und 1852, II p. 342. Vergl. Brioschi Det. (39) und (63).

folglich (2)

$$t_{i1}\,a_{11} + t_{i2}\,a_{12} + \ldots = b_{1i}\,R$$
$$t_{i1}\,a_{21} + t_{i2}\,a_{22} + \ldots = b_{2i}\,R$$

und daher

$$t_{i1}(a_{11}\beta_{1k} + a_{21}\beta_{2k} + \ldots) + t_{i2}(a_{12}\beta_{1k} + a_{22}\beta_{2k} + \ldots) + \ldots$$
$$\text{d. i.}\quad t_{i1}u_{1k} + t_{i2}u_{2k} + \ldots = R(b_{1i}\beta_{1k} + b_{2i}\beta_{2k} + \ldots)$$

Durch Composition der Reihen t_{i1}, t_{i2}, .. und u_{1k}, u_{2k}, .. findet man also RS, wenn $k = i$, oder 0, wenn k von i verschieden. Z. B.

$$(5234)(1678) + (1534)(2678) + (1254)(3678) + (1235)(4678) = (1234)(5678)$$
$$(5234)(5178) + (1534)(5278) + (1254)(5378) + (1235)(5478) = 0$$

10. Wenn man

$$\binom{b}{k} = \frac{b(b-1)\ldots(b-k+1)}{1.2\quad\ldots\quad k}$$

setzt, so ist

$$R = \begin{vmatrix} 1 & \binom{c+m}{1} & \binom{c+m+1}{2} & \ldots & \binom{c+2m-1}{m} \\ 1 & \binom{c+m+1}{1} & \binom{c+m+2}{2} & \ldots & \binom{c+2m}{m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & \binom{c+2m}{1} & \binom{c+2m+1}{2} & \ldots & \binom{c+3m-1}{m} \end{vmatrix} = 1$$

Denn zufolge der Identität

$$\binom{c+n}{k} - \binom{c+n-1}{k} = \binom{c+n-1}{k-1}$$

erhält man nach Verminderung jeder Zeile um die vorhergehende

$$R = \begin{vmatrix} 1 & \binom{c+m}{1} & \binom{c+m+1}{2} & \ldots & \binom{c+2m-1}{m} \\ 0 & 1 & \binom{c+m+1}{1} & \ldots & \binom{c+2m-1}{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 1 & \binom{c+2m}{1} & \ldots & \binom{c+3m-2}{m-1} \end{vmatrix}$$

Vollzieht man dieselbe Operation an den letzten $m-1$, $m-2$, .. Zeilen, so werden alle Elemente der Diagonale 1, während alle Elemente einerseits der Diagonale verschwinden. Daher ist $R = 1$, unabhängig von c und m.

11. Multiplicirt man in dem System (die leeren Stellen des Systems enthalten Nullen)

$$B = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 \\ a_1 & -b_0 & b_2 \\ a_2 & & -b_1 & b_3 \\ . & . & . \\ a_{n-1} & & & -b_{n-2} & b_n \\ a_n & & & & -b_{n-1} \end{vmatrix}$$

die Zeilen der Reihe nach mit $b_0, b_1, .., b_n$, und addirt dann zu jeder Zeile die folgenden Zeilen, so erhält man ein System, dessen Determinante sich auf ihr Anfangsglied reducirt, so dass

$$b_0 b_1 .. b_n B = (-1)^n (a_0 b_0 + .. + a_n b_n) b_0 b_1 . b_1 b_2 .. b_{n-1} b_n$$

Daher ist*)

$$B = (-1)^n (a_0 b_0 + .. + a_n b_n) b_1 b_2 .. b_{n-1}$$

Aehnliche Form haben die Nenner und die Zähler der Näherungs-Brüche für einen gegebenen Kettenbruch (unten §. 8. 3), sowie Sylvester's Continuanten. Philos. Mag. 1853 t. 5 p. 453, t. 6 p. 297. Muir Philos. Mag. 1877 p. 137 u. 360.

12. Wenn die Elemente a_{ik} und a_{ki} gleich sind, und jedes in der Diagonale stehende Element a_{ii} der Summe der mit ihm in einer Reihe stehenden Elemente entgegengesetzt gleich ist, so ist die Determinante des Systems null, und alle Elemente haben gleiche Adjuncten**).

Beweis. Alle Elemente einer Zeile des Systems

$$\begin{matrix} a_{00} & .. & a_{0n} \\ . & ... & . \\ a_{n0} & .. & a_{nn} \end{matrix}$$

verschwinden zufolge der Voraussetzung, nachdem man zu derselben Zeile alle übrigen Zeilen des Systems addirt hat. Also ist die Determinante des Systems null.

Wenn man in dem System, dessen Determinante die Adjuncte α_{00} des Elements a_{00} ist,

$$\begin{matrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ . & ... & . \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{matrix}$$

*) Hermite 1849 Liouv. J. 14 p. 26.

**) Borchardt Berl. Monatsbericht 1859 p. 380 und Crelle J. 57 p. 114.

zur $i$ten Zeile die übrigen Zeilen addirt, so kommen in die $i$te Zeile die Elemente

$$-a_{01} \quad -a_{02} \quad . \; . \quad -a_{0n}$$

Addirt man nun zur $k$ten Colonne die übrigen Colonnen, so erhält man in der $k$ten Colonne die Elemente

$$-a_{10} \quad . \; . \quad -a_{i-1,0} \quad a_{00} \quad -a_{i+1,0} \quad . \; . \quad -a_{n0}$$

Indem man noch die transformirten Reihen voranstellt, findet man (3)

$$a_{00} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{00} & . \; . & a_{0,k-1} & a_{0,k+1} & . \; . & a_{0n} \\ . & . \; . & & & & \\ a_{i-1,0} & . \; . & & & & \\ a_{i+1,0} & . \; . & & & & \\ . & . \; . & & & & \\ a_{n0} & . \; . & & & & \end{vmatrix} = \alpha_{ik}$$

13. Die Determinante $n$ten Grades eines aus $2n-1$ Grössen gebildeten Systems

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . \; . & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & . \; . & a_n \\ . & . & . \; . & . \\ a_{n-1} & a_n & . \; . & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

bleibt unverändert, wenn an die Stelle der Grössen die Anfangsglieder ihrer Differenzen-Reihen gesetzt werden*).

Beweis. Man bilde aus der Reihe der gegebenen Grössen die Reihen ihrer ersten, zweiten, . . Differenzen, indem man jedes Glied von dem folgenden subtrahirt:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & . \; . \\ & \Delta_1 & \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & . \; . \\ & & \Delta_2 & \Delta_{21} & \Delta_{22} & . \; . \\ & & & \Delta_3 & \Delta_{31} & . \; . \\ & & & & \Delta_4 & . \; . \\ & & & & & . \; . \end{array}$$

Subtrahirt man nun von der $n$ten, $(n-1)$ten, . . Colonne des gegebenen Systems die jedesmal vorhergehende, so erhält man

*) H. Hankel über eine besondre Classe der symmetrischen Determinanten. Göttingen 1861.

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \cdot\cdot & \Delta_{1,n-2} \\ a_1 & \Delta_{11} & \cdot\cdot & \Delta_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n-1} & \Delta_{1,n-1} & \cdot\cdot & \Delta_{1,2n-3} \end{vmatrix}$$

Indem man dieselbe Operation wiederholt an den neuen Colonnen vollzieht, findet man

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \Delta_2 & \cdot\cdot & \Delta_{n-1} \\ a_1 & \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdot\cdot & \Delta_{n-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n-1} & \Delta_{1,n-1} & \Delta_{2,n-1} & \cdot\cdot & \Delta_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Führt man die angegebene Reihe von Operationen auch an den Zeilen des zuletzt gefundenen Systems aus, so erhält man

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \Delta_2 & \cdot\cdot & \Delta_{n-1} \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \cdot\cdot & \Delta_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \Delta_{n-1} & \Delta_n & \Delta_{n+1} & \cdot\cdot & \Delta_{2n-2} \end{vmatrix}$$

was zu beweisen war.

Wenn insbesondre a_k eine ganze Function $m$ten Grades von k mit dem obersten Coefficienten 1 ist, so bilden wie bekannt die Grössen a_0, a_1, a_2, .. eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung, und die Glieder ihrer $m$ten Differenzen-Reihe haben den gemeinschaftlichen Werth $\Delta_m = 1.2\ldots m$, weshalb Δ_{m+1}, Δ_{m+2}, .. verschwinden. Wenn nun $n-1 = m$, so wird (3 und §. 2, 3)

$$P = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}(1.2\ldots m)^{m+1}$$

während P verschwindet, wenn $n-1 < m$. In beiden Fällen können statt der Grössen a_0, a_1, a_2, .. auch die Grössen a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, .. gesetzt werden.

Wenn z. B. c eine beliebige Zahl ist und

$$a_k = \binom{c+k+m}{m} = \frac{(c+k+m)(c+k+m-1)\ldots(c+k+1)}{1.2\ldots m}$$

so hat man

$$P = \begin{vmatrix} \binom{c+m}{m} & \binom{c+m+1}{m} & \cdot & \binom{c+2m}{m} \\ \binom{c+m+1}{m} & & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot\cdot & \cdot \\ \binom{c+2m}{m} & & \cdot\cdot & \binom{c+3m}{m} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

14. Partiale Differentiale einer Determinante. Wenn unter den Elementen des Systems nur a_{ik} sich ändert, so ändert sich in der Determinante R nur das Product $a_{ik}\,\alpha_{ik}$, und von diesem nur der erste Factor. Also ist*)

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik}$$

Wenn unter den Elementen, welche α_{ik} enthält, nur a_{rs} sich ändert, so ist das Product

$$\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial a_{rs}} a_{rs} = \frac{\partial^2 R}{\partial a_{ik} \partial a_{rs}} a_{rs}$$

das Aggregat der Glieder von α_{ik}, welche das Element a_{rs} enthalten, und

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{ik} \partial a_{rs}} a_{ik}\, a_{rs}\ .$$

das Aggregat der Glieder von R, welche die Elemente a_{ik}, a_{rs} enthalten. U. s. w.

Demnach sind adjungirt (§. 2, 5)

$$a_{ik} \quad \text{und} \quad \frac{\partial R}{\partial a_{ik}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{ik} & a_{is} \\ a_{rk} & a_{rs} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 R}{\partial a_{ik} \partial a_{rs}}$$

$$\frac{\partial^{n-m} R}{\partial a_{\varrho t} \partial a_{\sigma u} \ldots} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^m R}{\partial a_{\alpha f} \partial a_{\beta g} \ldots}\ .$$

unter der Voraussetzung, dass $a_{\alpha f}\, a_{\beta g} \ldots a_{\varrho t}\, a_{\sigma u} \ldots$ ein Glied der Determinante R ist. Daher hat man

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{is} \partial a_{rk}} = - \frac{\partial^2 R}{\partial a_{ik} \partial a_{rs}} \quad \text{u. s. w.}$$

Wenn die Elemente des Systems nicht alle von einander unabhängig sind, z. B. $a_{ki} = \varepsilon a_{ik}$, so ist

$$\left(\frac{\partial R}{\partial a_{ik}}\right) da = \frac{\partial R}{\partial a_{ik}} + \frac{\partial R}{\partial a_{ki}} \frac{d a_{ki}}{d a_{ik}} da$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial a_{ik}}\right) = \alpha_{ik} + \varepsilon \alpha_{ki}$$

---

*) Jacobi Det. 6. 10.

Wenn $a_{ki} = a_{ik}$, so ist $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$ (5), daher*)

$$\left(\frac{\partial R}{\partial a_{ik}}\right) = 2\alpha_{ik}$$

Wenn $a_{ki} = -a_{ik}$, $a_{ii} = 0$, und n gerade, so ist $\alpha_{ki} = -\alpha_{ik}$,

$$\left(\frac{\partial R}{\partial a_{ik}}\right) = 2\alpha_{ik}$$

Bei ungeradem n sind die Determinante und ihre Differential-coefficienten identisch null.

15. Differential einer Determinante. Wenn alle Elemente des Systems sich ändern, so ist das vollständige Differential der Determinante**)

$$dR = \Sigma \frac{\partial R}{\partial a_{ik}} da_{ik} = \Sigma \alpha_{ik}\, da_{ik} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ ..)$$

$$= \Sigma \alpha_{i1}\, da_{i1} + \Sigma \alpha_{i2}\, da_{i2} + .. \quad (i = 1,\ 2,\ ..)$$

$$d\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} da_{11} & a_{12} & a_{13} & . \\ da_{21} & a_{22} & a_{23} & . \\ da_{31} & a_{32} & a_{33} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & da_{12} & a_{13} & . \\ a_{21} & da_{22} & a_{23} & . \\ a_{31} & da_{32} & a_{33} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} + .$$

die Summe von n Determinanten, die man aus R ableitet, indem man die Elemente je einer unter den parallelen Reihen durch deren Differentiale ersetzt.

Beispiele. I.

$$v = \frac{M}{N} \qquad N^2 dv = \begin{vmatrix} dM & M \\ dN & N \end{vmatrix}$$

$$d\begin{vmatrix} dM & M \\ dN & N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d^2M & M \\ d^2N & N \end{vmatrix}$$

$$R = \Sigma \pm a_{11} \,..\, a_{44} = \begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ b & 2c & d & 0 \\ 0 & b & 2c & d \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial a_{22}}\frac{\partial a_{22}}{\partial a} = \alpha_{11} + \alpha_{22}$$

---

*) Jacobi Crelle J. 12 p. 20.

**) Jacobi Det. 6.

$$\frac{\partial R}{\partial b} = \frac{\partial R}{\partial a_{12}}\frac{\partial a_{12}}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a_{23}}\frac{\partial a_{23}}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a_{31}}\frac{\partial a_{31}}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a_{42}}\frac{\partial a_{42}}{\partial b}$$

$$= 2\alpha_{12} + 2\alpha_{23} + \alpha_{31} + \alpha_{42}$$

$$\frac{\partial R}{\partial c} = \alpha_{13} + \alpha_{24} + 2\alpha_{32} + 2\alpha_{43}$$

$$\frac{\partial R}{\partial d} = \alpha_{33} + \alpha_{44}$$

II. Wenn $du = u_1 dx + u_2 dy$, $du_1 = u_{11} dx + u_{12} dy, \ldots$, und wenn, nachdem u einen constanten Werth erhalten hat, $dy = y' dx$, $dy' = y'' dx$ ist, so findet man

$$y' = \frac{-u_1}{u_2} \qquad u_2^2 y'' dx = \begin{vmatrix} u_1 & du_1 \\ u_2 & du_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_{11} + u_{12} y' \\ u_2 & u_{12} + u_{22} y' \end{vmatrix} dx$$

$$u_2^3 y'' = \begin{vmatrix} 0 & u_1 + u_2 y' & u_2 \\ u_1 & u_{11} + u_{12} y' & u_{12} \\ u_2 & u_{12} + u_{22} y' & u_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix}$$

III. Die Determinante eines Systems, dessen Colonnen n gegebene Functionen von x und deren 1te, 2te, .., $(n-1)$te Differentialcoefficienten sind,

$$R = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\ \cdot & y_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ y_n & y_{n1} & \cdot\ \cdot & y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

hat die Eigenschaft, mit y^n multiplicirt zu werden, wenn man die gegebenen Functionen durch ihre Producte mit einer beliebigen Function y von x ersetzt*).

$$\begin{vmatrix} y_1 y & (y_1 y)_1 & \cdot\ \cdot & (y_1 y)_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ y_n y & (y_n y)_1 & \cdot\ \cdot & (y_n y)_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\ \cdot & y_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ y_n & y_{n1} & \cdot\ \cdot & y_{n,n-1} \end{vmatrix} y^n$$

Denn es ist nach der Regel für die Differentiation eines Products

$$(y_i y)_1 = y_{i1} y + y_i y', \quad (y_i y)_2 = y_{i2} y + 2 y_{i1} y' + y_i y'', \ldots$$

also die gesuchte Determinante eine Summe von Determinanten (6). Die erste derselben ist theilbar durch y^n, die übrigen sind null (4).

*) Hesse Crelle J. 54 p. 249 und Christoffel 55 p. 298. Vergl. Frobenius Crelle J. 76 p. 238. 77 p. 245. Pasch Crelle J. 80 p. 177.

Wenn man in dem gegebenen System die Elemente der $n-1$ ersten Colonnen durch ihre Differentialcoefficienten ersetzt, so wird die Determinante null. Also ist*)

$$\frac{dR}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\cdot & y_{1,n-2} & y_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_{n1} & \cdot\cdot & y_{n,n-2} & y_{nn} \end{vmatrix}$$

IV. Sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ von einander unabhängig, und

$$R_n = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdot\cdot & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdot\cdot & t_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdot\cdot & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

so findet man

$$\frac{\partial R_n}{\partial t_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2t_1 & \cdot\cdot & (n-1)t_1^{n-2} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdot\cdot & t_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdot\cdot & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial^{n-2} R_n}{\partial t_1 \ldots \partial t_{n-1}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2t_1 & \cdot\cdot & (n-1)t_1^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 2t_{n-1} & \cdot\cdot & (n-1)t_{n-1}^{n-2} \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdot\cdot & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \ldots (n-1) R_{n-1}$$

Ebenso ergiebt sich

$$f(t_1)^2 \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{R_n}{f(t_1)}\right) = \begin{vmatrix} -f'(t_1) & f(t_1)-t_1 f'(t_1) & \cdot\cdot & (n-1)t_1^{n-2} f(t_1) - t_1^{n-1} f'(t_1) \\ 1 & t_2 & \cdot\cdot & t_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & t_n & \cdot\cdot & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$f(t_1)^2 f(t_2)^2 \ldots f(t_n)^2 \frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n}\left(\frac{R_n}{f(t_1) \ldots f(t_n)}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} -f'(t_1) & f(t_1)-t_1 f'(t_1) & \cdot\cdot & (n-1)t_1^{n-2} f(t_1) - t_1^{n-1} f'(t_1) \\ \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ -f'(t_n) & f(t_n)-t_n f'(t_n) & \cdot\cdot & (n-1)t_n^{n-2} f(t_n) - t_n^{n-1} f'(t_n) \end{vmatrix}$$

---

*) Malmstèn Crelle J. 39 p. 91.

§. 4. Entwickelung der Determinante nach den Subdeterminanten einer Combination paralleler Reihen.

1. Wenn man die Subdeterminanten der $i$ten Zeilen-Combination $m$ten Grades (§. 2, 4) $p_{i1}, p_{i2}, \ldots p_{i\mu}$ mit den Adjuncten der entsprechenden Subdeterminanten der $k$ten Zeilen-Combination $q_{k1}, q_{k2}, \ldots, q_{k\mu}$ componirt, so erhält man entweder die Determinante R des gegebenen Systems oder 0, je nachdem $k = i$ oder k von i verschieden. Dasselbe gilt in Bezug auf Colonnen-Combinationen. Vergl. §. 3, 2*).

Beweis. Ein Glied der Determinante R enthält n Elemente, darunter m, die der $i$ten Zeilen-Combination angehören, und dabei einer bestimmten, der $h$ten Colonnen-Combination. Also ist dieses Glied eines der Glieder von R, welche in dem Product $p_{ih} q_{ih}$ vereinigt sind (§. 2, 5). Demnach umfasst die Summe

$$p_{i1} q_{i1} + p_{i2} q_{i2} + \ldots + p_{i\mu} q_{i\mu}$$

alle Glieder der Determinante, jedes einfach. Dagegen ist

$$p_{k1} q_{i1} + p_{k2} q_{i2} + \ldots + p_{k\mu} q_{i\mu}$$

die Determinante des Systems, welches aus dem gegebenen System dadurch abgeleitet wird, dass man die $i$te Zeilen-Combination durch die $k$te ersetzt. Die Zeilen dieses Systems sind nicht alle von einander verschieden, also ist die Determinante desselben null.

Die Summe $p_{i1} q_{i1} + p_{i2} q_{i2} + \ldots$ hat $\mu m!\,(n-m)! = n!$ Glieder, weil

$$\mu = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Beispiele. Durch Entwickelung nach den Subdeterminanten der beiden ersten Zeilen des Systems findet man

---

*) Cauchy l. c. p. 100. Der erste Theil dieses Satzes ist in einem allgemeinern Satz enthalten, welcher der Laplace'sche Determinantensatz genannt wird. S. unten (5).

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \quad & 12 \mid 34 + 23 \mid 14 + 31 \mid 24 \\ + \; & 34 \mid 12 + 14 \mid 23 + 24 \mid 31 \end{aligned}$$

$$\text{wenn } 12 \mid 34 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

Die Colonnen-Nummern bilden Permutationen einer Classe.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & . & . & . \\ \hline c_1 & c_2 & . & . & . \\ d_1 & d_2 & . & . & . \\ e_1 & e_2 & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \quad & 12 \mid 345 + 23 \mid 145 + 34 \mid 125 + 45 \mid 123 \\ + \; & 23 \mid 425 + 24 \mid 315 + 35 \mid 142 \\ + \; & 14 \mid 235 + 25 \mid 134 \\ + \; & 15 \mid 243 \end{aligned}$$

$$\text{wenn } 12 \mid 345 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & c_4 & c_5 \\ d_3 & d_4 & d_5 \\ e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

2. Wenn das System in m Zeilen $n-m$ Colonnen Nullen hat, so ist seine Determinante das Product einer Subdeterminante $m$ten Grades mit ihrer Adjuncte. Wenn das System in m Zeilen mehr als $n-m$ Colonnen Nullen hat, so ist seine Determinante 0*).

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ b & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c & c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ \hline d & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_3 & d_4 \\ e_3 & e_4 \end{vmatrix}$$

Die übrigen Subdeterminanten der 3 ersten Zeilen sind null.

*) Jacobi Det. 5.

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ b & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ c & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline d & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix} = 0$$

Alle Subdeterminanten der 3 ersten Zeilen sind null.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a & c & c' & a' \\ b & d & d' & b' \\ b' & d' & d & b \\ a' & c' & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+a' & c+c' & c' & a' \\ b+b' & d+d' & d' & b' \\ b'+b & d'+d & d & b \\ a'+a & c'+c & c & a \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} a+a' & c+c' & c' & a' \\ b+b' & d+d' & d' & b' \\ 0 & 0 & d-d' & b-b' \\ 0 & 0 & c-c' & a-a' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d-d' & b-b \\ c-c' & a-a \end{vmatrix}$$

Ebenso findet man (vergl. §. 11, 2)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ d+b & a+c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a-c & b-d \\ d-b & a-c \end{vmatrix}$$

3. Die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha' & \alpha\alpha' \\ 1 & \beta & \beta' & \beta\beta' \\ 1 & \gamma & \gamma' & \gamma\gamma' \\ 1 & \delta & \delta' & \delta\delta' \end{vmatrix}$$

nach den Subdeterminanten der ersten beiden Colonnen entwickelt giebt

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\gamma'\delta' + \ldots + (\gamma-\delta)(\alpha-\beta)\alpha'\beta' + \ldots \\ = A(\alpha'\delta' + \beta'\gamma') + B(\beta'\delta' + \alpha'\gamma') + C(\gamma'\delta' + \alpha'\beta')\end{aligned}$$

wenn man

$$(\beta-\gamma)(\alpha-\delta) = A, \quad (\gamma-\alpha)(\beta-\delta) = B, \quad (\alpha-\beta)(\gamma-\delta) = C$$

setzt, wobei $A + B + C = 0$ (§. 3, 9). Daher ist

$$\begin{aligned} R &= A(\alpha'\delta' + \beta'\gamma' - \gamma'\delta' - \alpha'\beta') - B(\gamma'\delta' + \alpha'\beta' - \beta'\delta' - \alpha'\gamma') \\ &= A(\gamma' - \alpha')(\beta' - \delta') - B(\beta' - \gamma')(\alpha' - \delta') = AB' - A'B \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} B & B' \\ C & C' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & C' \\ A & A' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & A' \\ B & B' \end{vmatrix} \text{*)}$$

weil auch $A' + B' + C' = 0$. Insbesondere ist

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha' & \alpha\alpha' \\ 1 & \beta & \beta' & \beta\beta' \\ 1 & \gamma & \gamma' & \gamma\gamma' \\ 1 & \alpha' & \alpha & \alpha\alpha' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha+\alpha' & \alpha\alpha' \\ 1 & \beta & \beta+\beta' & \beta\beta' \\ 1 & \gamma & \gamma+\gamma' & \gamma\gamma' \\ 1 & \alpha' & \alpha+\alpha' & \alpha\alpha' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha+\alpha' & \alpha\alpha' \\ 1 & \beta & \beta+\beta' & \beta\beta' \\ 1 & \gamma & \gamma+\gamma' & \gamma\gamma' \\ 0 & \alpha'-\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha'-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & \alpha+\alpha' & \alpha\alpha' \\ 1 & \beta+\beta' & \beta\beta' \\ 1 & \gamma+\gamma' & \gamma\gamma' \end{vmatrix} = (\alpha'-\alpha)S$$

Die Determinante S hat die Glieder

$$\beta\gamma'(\gamma-\beta') + \gamma\alpha'(\alpha-\gamma') + \alpha\beta(\beta'-\gamma+\gamma-\alpha')$$
$$+ \beta'\gamma(\gamma'-\beta) + \gamma'\alpha(\alpha'-\gamma) + \alpha'\beta'(\beta-\gamma'+\gamma'-\alpha)$$

welche wie folgt vereinigt werden

$$\alpha(\gamma-\alpha')(\beta-\gamma') + \alpha'(\gamma'-\alpha)(\beta'-\gamma)$$
$$+ \beta'(\gamma'-\beta)(\gamma-\alpha') + \beta(\gamma-\beta')(\gamma'-\alpha)$$

so dass

$$S = (\alpha-\beta')(\beta-\gamma')(\gamma-\alpha') + (\alpha'-\beta)(\beta'-\gamma)(\gamma'-\alpha)$$

Durch die Gleichung $R = 0$ wird die Collinearität (Homographie) der entsprechenden Quadrupel $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ (Puncte einer Geraden, Gerade eines planen Büschels, Ebenen eines Büschels) ausgedrückt, während die Gleichung $S = 0$ die Involution der Paare $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ bedeutet. Vergl. Chasles Géom. sup. 1852 n^0 218.

4. Aus den Systemen

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_{11} & \cdot\cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot\cdot & b_{nn} \end{matrix}$$

werden 2mal μ Systeme abgeleitet, indem man im ersten System alle Colonnen-Combinationen der Reihe nach durch eine bestimmte Colonnen-Combination i des zweiten Systems, und im zweiten System eine bestimmte Colonnen-Combination k der Reihe nach durch alle Colonnen-Combinationen des ersten Systems ersetzt.

---

*) Cayley Philos. Trans. 1858 t. 148 p. 436.

Die Determinanten der gegebenen Systeme werden durch R und S bezeichnet, die Subdeterminanten durch p_{ik} und p'_{ik}, ihre Adjuncten durch q_{ik} und q'_{ik}, die Determinanten der abgeleiteten Systeme durch $t_{i1}, t_{i2}, \ldots$ und $u_{1k}, u_{2k}, \ldots$ Dann ist

$$\begin{array}{ll} R = p_{1h}\, q_{1h} + p_{2h}\, q_{2h} + \ldots & S = p'_{1h}\, q'_{1h} + p'_{2h}\, q'_{2h} + \ldots \\ t_{i1} = p'_{1i}\, q_{11} + p'_{2i}\, q_{21} + \ldots & u_{1k} = p_{11}\, q'_{1k} + p_{12}\, q'_{2k} + \ldots \\ t_{i2} = p'_{1i}\, q_{12} + p'_{2i}\, q_{22} + \ldots & u_{2k} = p_{12}\, q'_{1k} + p_{22}\, q'_{2k} + \ldots \\ \ldots\ \ldots & \ldots\ \ldots \end{array}$$

folglich (1)

$$\begin{array}{l} t_{i1}\, p_{11} + t_{i2}\, p_{12} + \ldots = p'_{1i} R \\ t_{i1}\, p_{21} + t_{i2}\, p_{22} + \ldots = p'_{2i} R \\ \ldots\ \ldots \end{array}$$

und daher

$$t_{i1}(p_{11} q'_{1k} + p_{21} q'_{2k} + \ldots) + t_{i2}(p_{12} q'_{1k} + p_{22} q'_{2k} + \ldots)$$

$$\text{d. i.} \quad t_{i1} u_{1k} + t_{i2} u_{2k} + \ldots = R(p'_{1i} q'_{1k} + p'_{2i} q'_{2k} + \ldots)$$

Durch Composition der Reihen $t_{i1}, t_{i2}, \ldots$ und $u_{1k}, u_{2k}, \ldots$ findet man also RS, wenn $k = i$, oder 0, wenn k von i verschieden*).

Z. B. aus den Systemen

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ d_5 & d_6 & d_7 & d_8 \end{array}$$

findet man, wenn die Determinanten t und u durch die Colonnen der Systeme bezeichnet werden,

$$5634.1278 + 5264.1378 + 5236.1478 + 1564.2378 + 1536.2478 + 1256.3478 = 1234.5678$$

$$1278.5634 + 1628.5734 + 1672.5834 + 5128.6734 + 5172.6834 + 5612.7834 = 5678.1234$$

$$1278.5612 + 1286.5712 + 1267.5812 = 0 \text{ u. s. w.}$$

5. Die Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ kann auch durch eine Summe von Producten mehrerer Subdeterminanten dargestellt werden**).

---

*) Sylvester. Vergl. §. 3, 9.

**) Vandermonde l. c. p. 524. Laplace l. c. p. 294. Jacobi Det. 8. Schering Gött. Ges. 1877, IV.

Man wähle eine Combination von α Colonnen $fg\,..$, aus den übrigen eine Combination von β Colonnen $ik\,..$, aus den übrigen eine Combination von γ Colonnen $pq\,..$, u. s. w., so dass

$$\alpha + \beta + \gamma + \,.. = n$$

und bilde von diesen Combinationen die Subdeterminanten αten, βten, γten, .. Grades

$$\begin{aligned} A &= \Sigma \pm a_{1f}\, a_{2g}\,.. \\ B &= \Sigma \pm a_{\alpha+1,i}\, a_{\alpha+2,k}\,.. \\ C &= \Sigma \pm a_{\alpha+\beta+1,p}\, a_{\alpha+\beta+2,q}\,.. \end{aligned}$$

u. s. w., dergestalt dass

$$a_{1f}\, a_{2g}\,..\, a_{\alpha+1,i}\, a_{\alpha+2,k}\,..\, a_{\alpha+\beta+1,p}\, a_{\alpha+\beta+2,q}\,..$$

ein Glied der Determinante R ist. Dann umfasst die Summe $\Sigma ABC\,..$ von

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}\,.. = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,..}$$

Gliedern (welche entstehn, indem man alle Colonnen-Combinationen bildet), alle Glieder der Determinante R, jedes einfach.

§. 5. Besondere Entwickelungen von Determinanten.

1. Die Determinante $n$ten Grades

$$F(z) = \begin{vmatrix} a_{11}+z & a_{12} & a_{13} & . \\ a_{21} & a_{22}+z & a_{23} & . \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+z & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

ist eine Function $n$ten Grades der Variablen z, von welcher die diagonalen Elemente des Systems abhängen. Der Coefficient von z^n ist 1, das constante Glied ist $F(0) = \Sigma \pm a_{11}\,..\,a_{nn}$. Um den Coefficienten von z^m zu finden, bilde man das Product der adjungirten Subdeterminanten $m$ten und $(n-m)$ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_{ff}+z & a_{fg} & . \\ a_{gf} & a_{gg}+z & . \\ . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{rr}+z & a_{rs} & . \\ a_{sr} & a_{ss}+z & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

welches die Glieder von $F(z)$

$$z^m \begin{vmatrix} a_{rr} & a_{rs} & . \\ a_{sr} & a_{ss} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = z^m R_{n-m}$$

enthält. Der gesuchte Coefficient wird durch die Summe ΣR_{n-m} ausgedrückt, deren Glieder allen Combinationen $(n-m)$ten Grades rs .. der Nummern $1 \ldots n$ entsprechen. Daher ist*)

$$F(z) = R_n + z\Sigma R_{n-1} + z^2\Sigma R_{n-2} + \ldots + z^n$$

Beispiel. Wenn $n=4$, und a_{11}, $\Sigma \pm a_{11}a_{22}$, .. durch 1, 12, .. bezeichnet werden, so ist $F(z)$

$$= 1234 + [123 + 124 + 134 + 234]z$$
$$+ [12 + 13 + 14 + 23 + 24 + 34]z^2 + [1 + 2 + 3 + 4]z^3 + z^4$$

2. Die analoge Entwickelung von

$$U = \begin{vmatrix} a-u & b & c \\ a' & b'-u' & c' \\ a'' & b'' & c''-u'' \end{vmatrix}$$

ergiebt

$$\Delta - u\alpha - u'\beta' - u''\gamma'' + u'u''a + uu''b' + uu'c'' - uu'u''$$

wenn

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

und α, β', γ'' die Adjuncten der Elemente a, b', c'' in Δ bedeuten. Unter den Voraussetzungen

$$u = a + b + c, \quad u' = a' + b' + c', \quad u'' = a'' + b'' + c''$$

verschwindet U (§. 3, 7) und man hat

$$\begin{aligned} \Delta &= uu'u'' - u'u''a - uu''b' - uu'c'' + u\alpha + u'\beta' + u''\gamma'' \\ &= uu'u'' - u'u''b - uu''c' - uu'a'' + u\beta + u'\gamma' + u''\alpha'' \\ &= uu'u'' - u'u''c - uu''a' - uu'b'' + u\gamma + u'\alpha' + u''\beta'' \end{aligned}$$

nach cyclischer Vertauschung der Colonnen, bei welcher Δ das Zeichen nicht wechselt (§. 1, 5). Daher ist

$$\frac{\Delta}{uu'u''} = 1 - \frac{a}{u} - \frac{b'}{u'} - \frac{c''}{u''} + \frac{\alpha}{u'u''} + \frac{\beta'}{uu''} + \frac{\gamma'}{uu'}$$

wovon die 3 letzten Glieder wiederum zerlegt werden können**).

---

*) Jacobi Crelle J. 12 p. 15.

**) Vergl. Jacobi Crelle J. 5 p. 350.

3. Die Glieder der Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ enthalten von den **Elementen der Diagonale** entweder alle n, oder $n-2$, oder $n-3$, .., oder 1, oder keines. Um die Glieder von R zu finden, welche m und nicht mehr diagonale Elemente enthalten, bilde man das Product der adjungirten Subdeterminanten $m$ten und $(n-m)$ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_{ff} & a_{fg} & . \\ a_{gf} & a_{gg} & . \\ . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{rr} & a_{rs} & . \\ a_{sr} & a_{ss} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

Der erste Factor hat das Glied $a_{ff}\, a_{gg} \ldots$, der andre Factor wird, nachdem man seine diagonalen Elemente durch Nullen ersetzt hat, durch D_{n-m} bezeichnet. Daher werden die gesuchten Glieder durch die Summe

$$\Sigma\, a_{ff}\, a_{gg} \ldots D_{n-m}$$

ausgedrückt, deren Glieder aus allen Combinationen $m$ten Grades $fg \ldots$ und den zugehörigen Combinationen $(n-m)$ten Grades $rs \ldots$ der Nummern $1 \ldots n$ gebildet sind*).

Beispiel. Wenn

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

durch (1234) bezeichnet wird, u. s. w., so ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{14} \\ . & . & . & . \\ a_{41} & . & . & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44} + a_{11}\, a_{22}\, (34) + a_{11}\, a_{33}\, (24) + a_{11}\, a_{44}\, (23)$$
$$+ a_{22}\, a_{33}\, (14) + a_{22}\, a_{44}\, (13) + a_{33}\, a_{44}\, (12)$$
$$+ a_{11}\, (234) + a_{22}\, (134) + a_{33}\, (124) + a_{44}\, (123) + (1234)$$

4. Die Anzahl derjenigen Glieder der Determinante

$$R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$$

welche diagonale Elemente des Systems enthalten, wird wie folgt gefunden. Die Formel (3)

$$a_{ff}\, a_{gg} \ldots \Sigma \pm a_{rr}\, a_{ss} \ldots$$

hat $(n-m)!$ Glieder, welche Glieder von R sind und m und mehr diagonale Elemente enthalten. Man bilde nun aus allen

---

*) Cayley Crelle J. 38 p. 93.

Combinationen $m$ten Grades fg . . und den zugehörigen Combinationen $(n-m)$ten Grades rs . . die entsprechenden $\binom{n}{m}$ Formeln und durch Addition derselben die Summe S_m. Diese Summe hat

$$(n-m)!\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!}$$

Glieder, welche Glieder von R mit m und mehr diagonalen Elementen sind, aber nicht alle von einander verschieden. Denn ein Glied einer der addirten Formeln, welches k und nicht mehr diagonale Elemente enthält, kommt in $\binom{k}{m}$ Formeln einfach vor und hat in S_m den Coefficienten $\binom{k}{m}$.

Ein gegebenes Determinantenglied mit k und nicht mehr diagonalen Elementen hat in dem Aggregat von k und mehr Summen $S_1 - S_2 + S_3 - ..$ den Coefficienten

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - ..$$

$$\text{d. i. } 1, \quad \text{weil } 1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - ..$$

$= (1-1)^k = 0.$

Demnach enthält das Aggregat der n Summen $S_1 - S_2 + S_3 - ..$ kein Determinantenglied ohne diagonale Elemente, aber alle Determinantenglieder mit 1 und mehr diagonalen Elementen, jedes einfach.

Wenn man entsprechend die Gliederzahl von S_1 vermindert um die Gliederzahl von S_2, vermehrt um die Gliederzahl von S_3, u. s. w., so behält man die Anzahl der Determinantenglieder mit diagonalen Elementen

$$\frac{n!}{1} - \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3!} - ..$$

und findet die Anzahl der Determinantenglieder ohne diagonale Elemente

$$\psi_n = n!\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + .. + \frac{(-1)^n}{n!}\right\}$$

Weil

$$e^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + .. + \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + ..$$

so ist ψ_n bei ungeradem n die ganze Zahl des Quotienten $n! : e$, bei geradem n die nächsthöhere ganze Zahl.

Zur recursiven Berechnung von ψ_n hat man

$$\begin{aligned}\psi_{n+1} &= (n+1)! \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right\} \\ &= (n+1)\psi_n + (-1)^{n+1}\end{aligned}$$

und durch Addition von $\psi_n = n\psi_{n-1} + (-1)^n$

$$\psi_{n+1} = n(\psi_{n-1} + \psi_n)$$

Aus $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 1$ findet man

$$\psi_3 = 2, \quad \psi_4 = 9, \quad \psi_5 = 44, \quad \psi_6 = 265$$

u. s. w.

Wenn man in der Entwickelung der Determinante R nach den diagonalen Elementen (3) die einzelnen Glieder zählt, so erhält man direct die Recursion

$$\psi_n + \binom{n}{n-1}\psi_{n-1} + \ldots + \binom{n}{2}\psi_2 + 1 = n!$$

und kann ψ_n, nachdem man $n-1$, $n-2$, .. für n gesetzt hat, aus dem aufgestellten linearen System berechnen*).

5. Wenn $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ und α_{ik} dem Element a_{ik} adjungirt ist, so kann die Determinante $S = \Sigma \pm a_{00} a_{11} \ldots a_{nn}$ des um den Rand $a_{n0} \ldots a_{00} \ldots a_{0n}$ vergrösserten Systems nach den Elementen des Randes entwickelt werden**)

$$S = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & . \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & . \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = a_{00}R - \Sigma a_{i0}\, a_{0k}\, \alpha_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots)$$

Die Glieder von S, welche das Element a_{00} enthalten, werden durch $a_{00}R$ ausgedrückt. Wenn

$$Q = \operatorname{adj} \begin{vmatrix} a_{00} & a_{0k} \\ a_{i0} & a_{ik} \end{vmatrix}$$

*) Die Zahl ψ_n ist in der 3. Auflage dieses Buchs 1870 direct und recursiv bestimmt worden. Vergl. den Aufsatz des Verf. in den Leipziger Berichten 1873 p. 534. Eine andre Auszählung hat J. Weyrauch Crelle J. 74 p. 273 mitgetheilt. Der recursive Ausdruck für ψ_{n+1} ist direct aufgestellt worden von Monro Messenger of Math. 1872 p. 38.

**) Cauchy l. c. p. 69.

in S ist, so ist $a_{00}\,a_{ik}\,Q$ Ausdruck der Glieder von S, welche die Elemente a_{00}, a_{ik} enthalten, folglich $a_{ik}\,Q$ Ausdruck der Glieder von R, welche das Element a_{ik} enthalten, d. i. $a_{ik}\,\alpha_{ik}$. Daher ist $Q = \alpha_{ik}$, und $-a_{i0}\,a_{0k}\,\alpha_{ik}$ Ausdruck der Glieder von S, welche die Elemente des Randes a_{i0}, a_{0k} enthalten.

Beispiele.
$$\begin{vmatrix} a & f & g & h \\ f' & b & 0 & 0 \\ g' & 0 & c & 0 \\ h' & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd - ff'cd - gg'bd - hh'bc$$

Unter den Adjuncten der Elemente des kleinern Systems sind nur die der diagonalen Elemente nicht null.

$$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2+x_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3+x_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_3 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1+x_1)\,x_2x_3x_4 + a_2x_1x_3x_4 + a_3x_1x_2x_4 + a_4x_1x_2x_3$$

$$= x_1x_2x_3x_4\left(1 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} + \frac{a_4}{x_4}\right)$$

Die letzte Zeile des gegebenen Systems wird um die vorhergehenden Zeilen vermehrt, die vorletzte desgleichen, u. s. w. Im transformirten System wird die erste Zeile von den folgenden Zeilen subtrahirt. Wenn $x_1 = x_2 = .. = x$, $a_1 + a_2 + .. = b$, so ist die Determinante $x^4\left(1 + \frac{b}{x}\right)$.

6. Wenn $a_{ki} = a_{ik}$, so ist $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$ (§. 3, 5), folglich

$$S = a_{00}R - \Sigma a_{i0}^2\,\alpha_{ii} - 2\Sigma a_{i0}\,\cancel{a_{k0}}\,\alpha_{ik}$$

so dass für i die Nummern $1 \,..\, n$, für ik die Combinationen 2ten Grades derselben Nummern gesetzt werden. a_{0k}

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc$$

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh$$

In $\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix}$ haben b, c, f die Adjuncten c, b, $-f$.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & h & g \\ b & h & 0 & f \\ c & g & f & 0 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a^2f^2 + b^2g^2 + c^2h^2 - 2abfg - 2acfh - 2bcgh \\ & = (af + bg - ch)^2 - 4abfg \end{aligned}$$

$$= -(\sqrt{af} + \sqrt{bg} + \sqrt{ch})(-\sqrt{af} + \sqrt{bg} + \sqrt{ch})$$
$$\times(\sqrt{af} - \sqrt{bg} + \sqrt{ch})(\ \sqrt{af} + \sqrt{bg} - \sqrt{ch})$$

$$\begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix} = \begin{aligned} & Rd - l^2a' - m^2b' - n^2c' \\ & - 2mnf' - 2lng' - 2lmh' \end{aligned}$$

wenn die Adjuncten der Elemente a, h, .. in

$$R = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

durch a', h', .. bezeichnet werden.

7. I. Wenn $R = \Sigma \pm a_{11} \,..\, a_{nn} = 0$, so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1k} \\ \alpha_{i1} & \alpha_{ik} \end{vmatrix} = 0 \quad (§. 3, 8)$$

$$S = \Sigma \pm a_{00}\, a_{11} \,..\, a_{nn} = -\Sigma\, a_{i0}\, a_{0k}\, \alpha_{ik} \quad (5)$$

und demnach unter der Voraussetzung, dass α_{11} nicht null ist,

$$\alpha_{11} S = -\Sigma\, a_{i0}\, \alpha_{i1} \Sigma\, a_{0k}\, \alpha_{1k}$$
$$= -(a_{10}\,\alpha_{11} + a_{20}\,\alpha_{21} + ..)(a_{01}\,\alpha_{11} + a_{02}\,\alpha_{12} + ..)$$
$$= -\begin{vmatrix} a_{10} & a_{12} & . \\ a_{20} & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} & . \\ a_{21} & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} \text{*)}$$

Die Factoren des durch S theilbaren Products sind den Adjuncten der Elemente a_{01} und a_{10} in S entgegengesetzt gleich, während

*) Vergl. HESSE Crelle J. 69 p. 319.

α_{11} die Adjuncte der Subdeterminante $a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10}$ ist. In der That ist nach dem Satz §. 3, 8, welcher allgemein gilt (vergl. unten §. 7, 2)

$$\begin{vmatrix} \operatorname{adj} a_{00} & \operatorname{adj} a_{01} \\ \operatorname{adj} a_{10} & \operatorname{adj} a_{11} \end{vmatrix} = \operatorname{adj} \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} S = \alpha_{11} S$$

II. Wenn insbesondere $a_{ki} = a_{ik}$, mithin $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$, so ist

$$\alpha_{11} S = -(\Sigma a_{i0}\alpha_{i1})^2 = -\begin{vmatrix} a_{10} & a_{12} & . \\ a_{20} & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix}^2$$

Vermöge der Identität $\alpha_{ii}\alpha_{kk} = \alpha_{ik}^2$ (§. 3, 8) ist zugleich

$$S = -\Sigma a_{i0}\sqrt{\alpha_{ii}}\,\Sigma a_{0k}\sqrt{\alpha_{kk}} = -(\Sigma a_{i0}\sqrt{\alpha_{ii}})^2$$

wobei durch eine Wurzel die übrigen Wurzeln eindeutig so bestimmt sind, dass das Product $\sqrt{\alpha_{ii}}\sqrt{\alpha_{kk}}$ den Werth α_{ik} hat (nicht $-\alpha_{ik}$).

Hieraus fliesst ein wichtiger Satz über die quadratischen Formen. Die quadratischen Formen

$$u = \Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad v = \Sigma \alpha_{ik} y_i y_k \qquad \left| \begin{matrix} i, k = 1, 2, .. \\ a_{ki} = a_{ik} \end{matrix} \right|$$

heissen adjungirte Formen, $R = \Sigma \pm a_{11} a_{22} ..$ heisst die Determinante der Form u (§. 2, 5), und zwar ist (I)

$$v = -\begin{vmatrix} 0 & y_1 & y_2 & . \\ y_1 & a_{11} & a_{12} & . \\ y_2 & a_{21} & a_{22} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

Dagegen ist

$$-\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & . \\ y_1 & a_{11} & a_{12} & . \\ y_2 & a_{21} & a_{22} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

eine lineare Form sowohl der x, als auch der y, also eine bilineare Form der x und der y. Vergl. unten §. 14, 11.

Unter der Voraussetzung $R = 0$ ist nun

$$\alpha_{11} v = (\Sigma \alpha_{i1} y_i)^2 = \begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & a_{13} & . \\ y_2 & a_{22} & a_{23} & . \\ y_3 & a_{32} & a_{33} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}^2$$

$$v = (\Sigma y_i \sqrt{\alpha_{ii}})^2$$

Wenn die Determinante einer quadratischen Form null ist, so ist die adjungirte Form das Quadrat einer linearen Form*).

8. I. Wenn $a_{ki} = -a_{ik}$, $a_{ii} = 0$, $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ geraden Grades, $R' = \Sigma \pm a_{22} \ldots a_{nn}$ ungeraden Grades, und wenn die Adjuncte von a_{ik} in R' durch α_{ik} bezeichnet wird, so ist (7)

$$R' = 0, \quad \alpha_{ki} = \alpha_{ik}, \quad \alpha_{ii}\,\alpha_{kk} = \alpha_{ik}^2$$
$$R = (\Sigma\, a_{1i} \sqrt{\alpha_{ii}})^2$$

mithin $\sqrt{R}$ eine lineare Form der Elemente einer Zeile oder einer Colonne. Bei $n = 4$ ist $\sqrt{\alpha_{ii}}$ rational, also $\sqrt{R}$ ein rationales Aggregat von 3 Gliedern; bei $n = 6$ ist $\sqrt{\alpha_{ii}}$ rational, also $\sqrt{R}$ ein rationales Aggregat von 3.5 Gliedern; u. s. w. Daher ist $\sqrt{R}$ ein rationales Aggregat von

$$1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (n-1) = \frac{n!}{2^{\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}n\right)!}$$

Gliedern. Jedes Glied von $\sqrt{R}$ ist ein Product von $\frac{1}{2}n$ Elementen, deren Nummern alle von einander verschieden sind. Insbesondere ist $a_{12}\, a_{34} \ldots a_{n-1,n}$ ein Glied eines Werthes von $\sqrt{R}$, weil

$$(a_{12}\, a_{34} \ldots a_{n-1,n})^2 = (-1)^{\frac{1}{2}n}\, a_{12}\, a_{34} \ldots a_{n-1,n}\, a_{21}\, a_{43} \ldots a_{n,n-1}$$

ein Glied von R ist; denn aus den Colonnen-Nummern 2143 .. wird durch $\frac{1}{2}n$ Vertauschungen von Nachbarn die Reihe 1234 .. erhalten. Der Werth von $\sqrt{R}$, welcher das Glied $a_{12}\, a_{34} \ldots a_{n-1,n}$ (nicht das entgegengesetzt gleiche) enthält, wird durch

$$J = (1, 2, \ldots, n)$$

bezeichnet**).

---

*) Diess ist von Salmon 1859 (Lessons n⁰. 154) auf anderem Wege gefunden worden. Vergl. Serret Algèbre t. 1 p. 556. Hesse l. c.

**) Jacobi Crelle J. 2 p. 354, 29 p. 236. Cayley Crelle J. 32 p. 119, 38 p. 95, 50 p. 299. Die Formel J ist von Jacobi zum Gebrauch beim Pfaff'schen Integrationsproblem construirt, von Cayley mit dem Namen

II. Bei Vertauschung von zwei Nummern der Elemente wechselt J das Zeichen. Wenn durch $a_{ik}B$ die Glieder von J bezeichnet werden, welche das Element a_{ik} enthalten, so ist B aus solchen Elementen gebildet, deren Nummern von i und k verschieden sind. Bei Vertauschung von i und k geht J über in J', $a_{ik}B$ in $a_{ki}B$ d. i. $-a_{ik}B$, während J^2 d. i. R zweimal das Zeichen wechselt (§. 2, 3), also unverändert bleibt. Zufolge der Identität $J^2 = J'^2$ sind aber J und J' nicht gleich sondern entgegengesetzt gleich, weil ihre Glieder $a_{ik}B$ und $-a_{ik}B$ entgegengesetzt gleich sind.

III. Unter der Voraussetzung

$$\sqrt{\alpha_{ii}} = (-1)^i(2, .., i-1, i+1, .., n)$$

oder nach $i-2$ cyclischen Vertauschungen

$$\sqrt{\alpha_{ii}} = (i+1, .., n, 2, .., i-1)$$

findet man $\sqrt{\alpha_{ii}}\sqrt{\alpha_{kk}} = \alpha_{ik}$, also zur recursiven Berechnung der Formel J

$$(1, 2, .., n) = a_{12}(3, .., n) + a_{13}(4, .., n, 2) + .. + a_{1n}(2, .., n-1)$$

Beweis. Die Glieder des Products $\sqrt{\alpha_{ii}}\sqrt{\alpha_{kk}}$ sind den Gliedern von α_{ik} der Reihe nach entweder gleich oder entgegengesetzt gleich, weil $\alpha_{ii}\alpha_{kk} = \alpha_{ik}^2$. Das Product

$$(-1)^{i+k}(2, .., i-1, i+1, .., n)(2, .., k-1, k+1, .., n)$$

geht durch eine bestimmte Menge von Zeichenwechseln über in

$$(k, p, q, r, .., u, v)(p, q, r, s, .., v, i)$$

wenn durch p, q, r, s, .., u, v die von 1, i, k verschiedenen Nummern der Reihe 1 bis n bezeichnet werden. Durch dieselbe Menge von Zeichenwechseln geht

---

PFAFFIAN belegt worden. Die Eigenschaften derselben sind von JACOBI ohne Beweis und ohne die von CAYLEY bemerkte Relation $J^2 = R$ mitgetheilt worden. Weitere hierzu gehörige Untersuchungen findet man bei SCHEIBNER Leipz. Berichte 1859 p. 151, VELTMANN Schlömilch Zeitschrift 1871 t. 16 p. 516, SCHERING analyt. Theorie der Determinanten VIII (Abh. der Gött. Ges. 1877 Bd. 22).

$$\alpha_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdot\,\cdot & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdot \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{i-1,2} & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{i+1,2} & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

über in

$$\begin{vmatrix} a_{kp} & a_{kq} & a_{kr} & \cdot & a_{ki} \\ a_{pp} & a_{pq} & a_{pr} & \cdot & a_{pi} \\ a_{qp} & a_{qq} & a_{qr} & \cdot & a_{qi} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{vp} & a_{vq} & a_{vr} & \cdot & a_{vi} \end{vmatrix}$$

Das Glied jenes Products

$$a_{kp}\, a_{qr} \,.\,.\, a_{uv} \,.\, a_{pq}\, a_{rs} \,.\,.\, a_{vi}$$

stimmt mit dem Glied der Determinante

$$a_{kp}\, a_{pq}\, a_{qr} \,.\,.\, a_{vi}$$

auch dem Zeichen nach.

Beispiele.

$$\Sigma \pm a_{11} \,.\,.\, a_{44} = (1, 2, 3, 4)^2$$

$$(1, 2, 3, 4) = a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23}$$

$$\Sigma \pm a_{11} \,.\,.\, a_{66} = (1, 2, .., 6)^2$$

$$\begin{aligned} (1, 2, .., 6) &= a_{12}(3, 4, 5, 6) + a_{13}(4, 5, 6, 2) + \,.\,.\, + a_{16}(2, 3, 4, 5) \\ &= a_{12}\, a_{34}\, a_{56} + a_{12}\, a_{35}\, a_{64} + a_{12}\, a_{36}\, a_{45} \\ &+ a_{13}\, a_{45}\, a_{62} + a_{13}\, a_{46}\, a_{25} + a_{13}\, a_{42}\, a_{56} \\ &+ a_{14}\, a_{56}\, a_{23} + a_{14}\, a_{52}\, a_{36} + a_{14}\, a_{53}\, a_{62} \\ &+ a_{15}\, a_{62}\, a_{34} + a_{15}\, a_{63}\, a_{42} + a_{15}\, a_{64}\, a_{23} \\ &+ a_{16}\, a_{23}\, a_{45} + a_{16}\, a_{24}\, a_{53} + a_{16}\, a_{25}\, a_{34} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & f & e \\ -b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad - be + cf)^2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b & c \\ -a & 0 & f & e \\ b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad + be + cf)^2$$

9. Wenn die Elemente der Determinante R so beschaffen sind, dass

$$a_{ik} = -a_{ki}, \qquad a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = z$$

so ist zufolge der oben (3) gezeigten Entwickelung

$$R = z^n + z^{n-2}\,\Sigma D_2 + z^{n-4}\,\Sigma D_4 + \ldots \text{*)}$$

wobei

$$D_m = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & . \\ a_{ki} & a_{kk} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

eine Subdeterminante $m$ten Grades ist, deren Elemente den Bedingungen

$$a_{rs} = -a_{sr}, \quad a_{rr} = 0$$

unterliegen, und ΣD_m die Summe der Determinanten bedeutet, welche aus D_m entspringen, indem für $ik\ldots$ alle Combinationen $m$ten Grades der Nummern 1 bis n gesetzt werden.

Bei ungeraden m ist D_m null, bei geraden m ist $D_m = (i, k\ldots)^2$, also ΣD_m die Summe von $\binom{n}{m}$ Quadraten.

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & z & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & z \end{vmatrix} = z^3 + z(a_{12}{}^2 + a_{13}{}^2 + a_{23}{}^2)$$

$$\begin{vmatrix} z & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & z & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & z & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & z \end{vmatrix} = z^4 + z^2(a_{12}{}^2 + a_{13}{}^2 + a_{14}{}^2 + a_{23}{}^2 + a_{24}{}^2 + a_{34}{}^2) \\ + (a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23})^2$$

§. 6. Determinante eines componirten Systems.

1. Wenn das Element c_{ik} aus der $i$ten Zeile des Systems a und der $k$ten Zeile des Systems b componirt ist (§. 3, 1) d. h.

$$c_{ik} = a_{i1}\,b_{k1} + a_{i2}\,b_{k2} + \ldots + a_{in}\,b_{kn}$$

*) Cayley l. c.

so wird die Determinante $m$ten Grades des componirten Systems $\Sigma \pm c_{11} \,..\, c_{mm}$ durch das Symbol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & .. & a_{mn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & .. & b_{1n} \\ . & . & . \\ b_{m1} & .. & b_{mn} \end{vmatrix}$$

ausgedrückt. Dieser Ausdruck bedeutet, wenn $n > m$, die Summe der $\binom{n}{m}$ Producte, welche aus

$$\begin{vmatrix} a_{1t} & a_{1u} & .. \\ . & . & . \\ a_{mt} & a_{mu} & .. \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{1t} & b_{1u} & .. \\ . & . & . \\ b_{mt} & b_{mu} & .. \end{vmatrix}$$

dadurch entspringen, dass man für tu .. alle Combinationen $m$ten Grades der Colonnen-Nummern 1 bis n setzt; der gegebene Ausdruck ist, wenn $n = m$, das Product der beiden Determinanten; der gegebene Ausdruck ist null, wenn $n < m$*).

Beweis. Ein Glied der Determinante des componirten Systems ist

$$\varepsilon c_{1\alpha} c_{2\beta} \,..\, = \varepsilon \Sigma a_{1t} b_{\alpha t} \Sigma a_{2u} b_{\beta u} \,..\, = \Sigma a_{1t} a_{2u} \,..\, \varepsilon b_{\alpha t} b_{\beta u} \,..$$

eine Summe, deren Glieder dadurch entstehn, dass t, u, .. die Reihe 1 bis n durchlaufen, während $\alpha\beta$ .. eine Permutation der 1 .. m ist. Man findet alle Glieder der Determinante, indem man in jedem Glied der Summe für $\alpha\beta$ .. alle Permutationen der 1 .. m setzt. Nun ist

$$\Sigma \varepsilon b_{\alpha t} b_{\beta u} \,..\, = \Sigma \pm b_{1t} b_{2u} \,..$$

folglich

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} \,..\, = \Sigma (a_{1t} a_{2u} \,..\, \Sigma \pm b_{1t} b_{2u} \,..)$$

Wenn t, u, .. nicht alle verschieden sind, so ist $\Sigma \pm b_{1t} b_{2u} \,..\, = 0$.

---

*) Binet und Cauchy (in den gleichzeitigen Abhandlungen J. de l'éc. polyt. Cah. 16 p. 286 und Cah. 17 p. 81, 107) haben diesen Satz 1812 gefunden durch Betrachtung der besondern Fälle, welche Lagrange (Mém. de l'acad. de Berlin 1773 p. 285) und Gauss (Disquis. arithm. 157. 159. 268, I) gegeben hatten. Von Jacobi Det. 13 und 14 wurde der Schlusssatz zuerst ausgesprochen. Den symbolischen Ausdruck hat die Determinante des componirten Systems in der 3ten Auflage dieses Buchs 1870 erhalten.

Daher braucht man, um alle Glieder der Summe zu erhalten, für tu .. nur je m verschiedene Nummern der Reihe 1 bis n zu setzen.

Wenn nun tu .. eine bestimmte Combination $m$ten Grades der 1 .. n ist, und $\alpha\beta$ .. eine Permutation von tu .., so ist

$$a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \,..\, \Sigma \pm b_{1\alpha}\, b_{2\beta} \,..\, = a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \,..\, \varepsilon \Sigma \pm b_{1t}\, b_{2u} \,..$$

Durch alle Permutationen der tu .. erhält man die Glieder

$$\Sigma \pm b_{1t}\, b_{2u} \,..\, \Sigma \varepsilon a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \,..\, = \Sigma \pm a_{1t}\, a_{2u} \,..\, \Sigma \pm b_{1t}\, b_{2u} \,..$$

Folglich ist

$$\Sigma \pm c_{11}\, c_{22} \,..\, = \Sigma(\Sigma \pm a_{1t}\, a_{2u} \,..\, \Sigma \pm b_{1t}\, b_{2u} \,..)$$

eine Summe, deren Glieder gebildet werden, indem man für tu .. alle Combinationen $m$ten Grades der Reihe 1 bis n setzt.

Wenn $n > m$, so hat die Summe $\binom{n}{m}$ Glieder. Wenn $n = m$, so bleibt 1 Glied der Summe übrig; wenn $n < m$, so können m verschiedene Nummern aus der Reihe 1 bis n nicht ohne Wiederholung genommen werden, und es bleibt kein Glied der Summe übrig.

Beispiele. Das System

$$\begin{array}{ll} a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1 & a_1 f_2 + b_1 g_2 + c_1 h_2 \\ a_2 f_1 + b_2 g_1 + c_2 h_1 & a_2 f_2 + b_2 g_2 + c_2 h_2 \end{array}$$

ist componirt aus den Systemen

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{array}$$

Seine Determinante ist

$$\left|\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccc} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{array}\right| = ab\,|\,fg + ac\,|\,fh + bc\,|\,gh$$

$$\text{wenn } ab\,|\,fg = \left|\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{array}\right| \text{ u. s. w.}$$

Das System

$$\begin{array}{lll} a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1 & a_1 f_2 + b_1 g_2 + c_1 h_2 & a_1 f_3 + b_1 g_3 + c_1 h_3 \\ a_2 f_1 + b_2 g_1 + c_2 h_1 & a_2 f_2 + b_2 g_2 + c_2 h_2 & a_2 f_3 + b_2 g_3 + c_2 h_3 \\ a_3 f_1 + b_3 g_1 + c_3 h_1 & a_3 f_2 + b_3 g_2 + c_3 h_2 & a_3 f_3 + b_3 g_3 + c_3 h_3 \end{array}$$

ist componirt aus den Systemen

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & f_1 & g_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & f_2 & g_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & f_3 & g_3 & h_3 \end{matrix}$$

Seine Determinante ist das Product

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

Das System

$$\begin{matrix} a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1 & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & a_1 f_4 + b_1 g_4 + c_1 h_4 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_4 f_1 + b_4 g_1 + c_4 h_1 & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & a_4 f_4 + b_4 g_4 + c_4 h_4 \end{matrix}$$

ist componirt aus den Systemen

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & f_1 & g_1 & h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_4 & b_4 & c_4 & f_4 & g_4 & h_4 \end{matrix}$$

Seine Determinante ist null und nicht verschieden von

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_4 & g_4 & h_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Wenn p, q, r, s lineare Functionen von x, y, z sind und den Werthen x_i, y_i, z_i die Werthe der Functionen p_i, q_i, .. entsprechen, so ist

$$\begin{vmatrix} p_1 x_1 + q_1 y_1 + r_1 z_1 + s_1 & p_1 x_2 + q_1 y_2 + r_1 z_2 + s_1 \\ p_2 x_1 + q_2 y_1 + r_2 z_1 + s_2 & p_2 x_2 + q_2 y_2 + r_2 z_2 + s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 - p_1 & q_2 - q_1 & r_2 - r_1 & s_2 - s_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \end{vmatrix}$$

eine quadratische Form der $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$.

2. Die Determinante $m$ten Grades des componirten Systems $\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{mm}$ kann durch eine Determinante $(m+n)$ten Grades der Elemente a und b ausgedrückt werden (§. 3, 3)

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\,\cdot & c_{1m} & a_{11} & \cdot\,\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot\,\cdot & c_{mm} & a_{m1} & \cdot\,\cdot & a_{mn} \\ 0 & \cdot\,\cdot & 0 & 1 & \cdot\,\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ 0 & \cdot\,\cdot & 0 & 0 & \cdot\,\cdot & 1 \end{vmatrix}$$

Die ersten m Colonnen werden verbessert, indem man die letzten n Colonnen mit $b_{i1}, b_{i2}, \ldots$ componirt von der $i$ten Colonne subtrahirt. Dadurch erhält man ohne Veränderung der Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 & a_{m1} & \ldots & a_{mn} \\ -b_{11} & \ldots & -b_{m1} & 1 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ -b_{1n} & \ldots & -b_{mn} & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

folglich für $\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{mm}$ den Ausdruck durch die a und b

$$(-1)^m \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 & a_{m1} & \ldots & a_{mn} \\ b_{11} & \ldots & b_{m1} & 1 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ b_{1n} & \ldots & b_{mn} & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ f_1 & f_2 & 1 & 0 & 0 \\ g_1 & g_2 & 0 & 1 & 0 \\ h_1 & h_2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Anmerkung. Durch Entwickelung der Determinante $(m+n)$ten Grades nach den Subdeterminanten der ersten m Zeilen (§. 4, 1) findet man unmittelbar die obigen Producte*). Wenn man unter den letzten n Colonnen $n-m$ auswählt, und daselbst die a durch Nullen ersetzt, so fallen unter den letzten n Zeilen ebensoviele fort, und man behält als einen Theil der gesuchten Entwickelung eine Determinante $2m$ten Grades, die nach Vertauschung der ersten m Colonnen mit den folgenden Colonnen d. i. nach m Zeichen-Wechseln auf ein Product von 2 Determinanten $m$ten Grades

$$\Sigma \pm a_{1t} a_{2u} \ldots \Sigma \pm b_{1t} b_{2u} \ldots$$

sich reducirt (§. 4, 2).

---

*) Nach Gordan (briefl. Mittheilung von Clebsch 1863 Nov.).

3. Wenn das zweite System dem ersten gleich ist, so ist das componirte System symmetrisch, d. h.

$$c_{ik} = a_{i1}a_{k1} + \ldots + a_{in}a_{kn} = c_{ki}$$

und die Determinante des componirten Systems

$$\Sigma \pm c_{11}c_{22}\ldots = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \end{vmatrix} = \Sigma(\Sigma \pm a_{1t}a_{2u}\ldots)^2$$

die Summe von $\binom{n}{m}$ Quadraten. Bei realen Elementen a ist die Determinante $\Sigma \pm c_{11}c_{22}\ldots$ positiv, und wird nur dann null, wenn die Determinante $\Sigma \pm a_{1t}a_{2u}\ldots$ bei allen Combinationen $tu\ldots$ null ist*). Die besondern Fälle

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & xx_1+yy_1+zz_1 \\ xx_1+yy_1+zz_1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & z \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & xx_1+yy_1+zz_1 & xx_2+yy_2+zz_2 \\ xx_1+yy_1+zz_1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \\ xx_2+yy_2+zz_2 & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 & x_2^2+y_2^2+z_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2$$

sind bereits von Lagrange (pyr. 3 u. 4) gefunden worden.

4. Das Product von zwei Determinanten $n$ten Grades P und Q ist eine Determinante R desselben Grades, die man bei gegebener Anordnung der beiden Systeme auf 4 im Allgemeinen verschiedene Arten darstellen kann**), indem man ihre Elemente componirt entweder aus je einer Zeile von P und einer Zeile von Q, oder aus je einer Zeile von P und einer Colonne von Q, oder aus je einer Colonne von P und einer Zeile von Q, oder aus je einer Colonne von P und einer Colonne von Q. Wenn nämlich

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} b_{11} & . & . & b_{1n} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & . & . & b_{nn} \end{vmatrix}$$

---

*) Jacobi l. c.

**) Cauchy l. c. p. 83.

so ist (1)

$$R = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix} = PQ$$

unter der Voraussetzung

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \ldots + a_{in} b_{kn}$$

Folglich ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot & \cdot & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma a_{1k} b_{1k} & \cdot & \cdot & \Sigma a_{1k} b_{nk} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma a_{nk} b_{1k} & \cdot & \cdot & \Sigma a_{nk} b_{nk} \end{vmatrix}$$

wenn die einzelnen Summen dadurch gebildet werden, dass man für k alle Nummern von 1 bis n setzt. Nach derselben Bildungsregel ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & b_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1n} & \cdot & \cdot & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma a_{1k} b_{k1} & \cdot & \cdot & \Sigma a_{1k} b_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma a_{nk} b_{k1} & \cdot & \cdot & \Sigma a_{nk} b_{kn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot & \cdot & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma a_{k1} b_{1k} & \cdot & \cdot & \Sigma a_{k1} b_{nk} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma a_{kn} b_{1k} & \cdot & \cdot & \Sigma a_{kn} b_{nk} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & b_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1n} & \cdot & \cdot & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma a_{k1} b_{k1} & \cdot & \cdot & \Sigma a_{k1} b_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma a_{kn} b_{k1} & \cdot & \cdot & \Sigma a_{kn} b_{kn} \end{vmatrix}$$

Die links stehenden Determinanten, deren Product gebildet wurde, sind von P und Q nicht verschieden (§. 2, 3). Also sind die rechts stehenden Determinanten von R nicht verschieden, d. h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot & \cdot & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

wenn c_{ik} eine der Summen

$$a_{i1} b_{k1} + \ldots + a_{in} b_{kn}$$
$$a_{i1} b_{1k} + \ldots + a_{in} b_{nk}$$
$$a_{1i} b_{k1} + \ldots + a_{ni} b_{kn}$$
$$a_{1i} b_{1k} + \ldots + a_{ni} b_{nk}$$

bedeutet.

Beispiele. Nach der ersten Regel hat man

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b' & a' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ -d' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac + bd & -ad' + bc' \\ -b'c + a'd & b'd' + a'c' \end{vmatrix}$$

Wenn a, b, .. complexe Zahlen, a', b', .. die conjugirten Zahlen sind, so ist aa' die Norm von a, eine Summe von 2 Quadraten, welche durch $\mathrm{N}a$ bezeichnet wird, u. s. w., folglich

$$(\mathrm{N}a + \mathrm{N}b)(\mathrm{N}c + \mathrm{N}d) = \mathrm{N}(ac + bd) + \mathrm{N}(ad' - bc')$$

Diese Identität enthält den Euler'schen Satz (Acta Petrop. 1777. I, 2 p. 48. Vergl. Nov. Comm. Petrop. 5 p. 53 und Lagrange Mém. de Berlin 1770 p. 123), nach welchem das Product zweier Summen von 4 Quadraten als Summe von 4 Quadraten auf 4 Arten dargestellt werden kann*).

Das Product einer Determinante mit einer Determinante niedern Grades wird ebenso gebildet, nachdem man die Determinante niedern Grades als Determinante höhern Grades dargestellt hat (§. 3, 3).

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_0 & q_0 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_0 & q_0 & 0 & 0 \\ p_1 & q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0p_0 + b_0q_0 & a_0p_1 + b_0q_1 & c_0 & d_0 \\ a_1p_0 + b_1q_0 & a_1p_1 + b_1q_1 & c_1 & d_1 \\ a_2p_0 + b_2q_0 & a_2p_1 + b_2q_1 & c_2 & d_2 \\ a_3p_0 + b_3q_0 & a_3p_1 + b_3q_1 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Anmerkung. Durch successive Multiplicationen gelangt man zu der allgemeinen Multiplicationsregel. König 1878 Math. Ann. 14 p. 507. Unter Benutzung der Abkürzungen $|a\,b\,c\,d|$, $|p\,q|$, $|p\,q\,r|$, $|p\,q\,r\,s|$ für obige und ähnliche Determinanten hat man

$$|a\,b\,c\,d|\,p_0 = |ap_0,\ b,\ c,\ d| = |ap_0 + bq_0,\ b,\ c,\ d|$$
$$|a\,b\,c\,d|\,p_0\,|p\,q| = |ap_0 + bq_0,\ b\,|p\,q|,\ c,\ d|$$

Die 2te Colonne wird ersetzt durch

$$p_1(ap_0 + bq_0) + b(p_0q_1 - p_1q_0) = p_0(ap_1 + bq_1)$$

---

*) Hermite Crelle J. 40 p. 297. Vergl. Gauss Werke 3 p. 384.

folglich ist

$$|a\,b\,c\,d|\,|p\,q| = |ap_0 + bq_0,\ ap_1 + bq_1,\ c,\ d|$$
$$= |ap_0 + bq_0 + cr_0,\ ap_1 + bq_1 + cr_1,\ c,\ d|$$
$$|a\,b\,c\,d|\,|p\,q|\,|p\,q\,r| = |ap_0 + \ldots,\ ap_1 + \ldots,\ c|p\,q\,r|,\ d|$$

Die 3te Colonne wird ersetzt durch

$$-(ap_0 + \ldots)r_0' - (ap_1 + \ldots)r_1' + c(r_0 r_0' + r_1 r_1' + r_2 r_2')$$
$$= r_2'(ap_2 + bq_2 + cr_2)$$

folglich ist, weil $r_2' = |pq|$,

$$|a\,b\,c\,d|\,|p\,q\,r| = |ap_0 + bq_0 + cr_0,\ ap_1 + \ldots,\ ap_2 + \ldots,\ d|$$
$$= |ap_0 + bq_0 + cr_0 + ds_0,\ ap_1 + \ldots,\ ap_2 + \ldots,\ d|$$

Man multiplicirt ferner mit $|p\ q\ r\ s|$, rechts die 4te Colonne, welche verbessert durch $|p\ q\ r|$ theilbar sich erweist. U. s. w.

5. Wenn die quadratische Form der x

$$\Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k \qquad \left|\begin{array}{c} i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ a_{ki} = a_{ik} \end{array}\right|$$

durch die lineare Substitution

$$\begin{array}{l} x_1 = b_{11}\, y_1 + \ldots + b_{1n}\, y_n \\ \ldots \qquad \ldots \\ x_n = b_{n1}\, y_1 + \ldots + b_{nn}\, y_n \end{array}$$

in die quadratische Form der y

$$\Sigma c_{\alpha\beta}\, y_\alpha\, y_\beta \qquad \left|\begin{array}{c} \alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ c_{\beta\alpha} = c_{\alpha\beta} \end{array}\right|$$

transformirt wird, so ist die Determinante der transformirten Form das Product der Determinante der gegebenen Form mit dem Quadrat der Determinante der Substitution*)

$$\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{nn} = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn} (\Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn})^2$$

Beweis. Durch die angegebene Substitution geht $\Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k$ über in $\Sigma a_{ik}\, b_{i\alpha}\, b_{k\beta}\, y_\alpha\, y_\beta$, so dass

$$c_{\alpha\beta} = \Sigma a_{ik}\, b_{i\alpha}\, b_{k\beta} = \Sigma a_{ki}\, b_{k\alpha}\, b_{i\beta} = c_{\beta\alpha}$$
$$= b_{1\alpha}\, \Sigma a_{1k}\, b_{k\beta} + b_{2\alpha}\, \Sigma a_{2k}\, b_{k\beta} + \ldots$$

---

*) Diese Bemerkung ist für $n = 2$ von Lagrange Rech. d. Arithm. 23 (Mém. de Berlin 1773 p. 285) gemacht worden, für $n = 3$ von Gauss Disq. arithm. 286. Vergl. unten §. 14, 3.

Daher ist (1)

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & . \\ c_{21} & c_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & . \\ b_{12} & b_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Sigma a_{1k} b_{k1} & \Sigma a_{2k} b_{k1} & . \\ \Sigma a_{1k} b_{k2} & \Sigma a_{2k} b_{k2} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma a_{1k} b_{k1} & \Sigma a_{2k} b_{k1} & . \\ \Sigma a_{1k} b_{k2} & \Sigma a_{2k} b_{k2} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . \\ a_{21} & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & . \\ b_{12} & b_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

also durch Multiplication $\Sigma \pm c_{11} \ldots = (\Sigma \pm b_{11} \ldots)^2 \, \Sigma \pm a_{11} \ldots$

6. Wenn

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & . \; . & a_{1n} \\ . & . \; . & . \\ a_{m1} & . \; . & a_{mn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & . \; . & b_{1n} \\ . & . \; . & . \\ b_{m1} & . \; . & b_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & . \; . & c_{1m} \\ . & . \; . & . \\ c_{m1} & . \; . & c_{mm} \end{vmatrix}$$

so ist

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & . \; . & a_{1n} \\ . & . & . \; . & . \\ 1 & a_{m1} & . \; . & a_{mn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b_{11} & . \; . & b_{1n} \\ . & . & . \; . & . \\ 1 & b_{m1} & . \; . & b_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c_{11} & . \; . & c_{1m} \\ . & . & . \; . & . \\ 1 & c_{m1} & . \; . & c_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 & . \\ 1 & 1+c_{11} & 1+c_{12} & . \\ 1 & 1+c_{21} & 1+c_{22} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & . \\ 1 & c_{11} & c_{12} & . \\ 1 & c_{21} & c_{22} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

$$= P - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & c_{11} & c_{12} & . \\ 1 & c_{21} & c_{22} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

daher $Q - P$ d. i.

$$\Sigma \begin{vmatrix} 1 & a_{1t} & a_{1u} & . \\ . & . & . & . \\ 1 & a_{mt} & a_{mu} & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b_{1t} & b_{1u} & . \\ . & . & . & . \\ 1 & b_{mt} & b_{mu} & . \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & c_{11} & c_{12} & . \\ 1 & c_{21} & c_{22} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

wenn für $tu \ldots$ alle Combinationen $(m-1)$ten Grades der Colonnen-Nummern 1 bis n gesetzt werden*).

*) S. des Verf. Aufsatz Leipz. Berichte 1873 p. 532 und Gundelfinger Schlömilch Zeitschrift 18 p. 312.

7. Wenn v, w, ξ_1, ξ_2, ξ_3 Functionen von x_1, x_2, x_3 sind, so dass

$$dv = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 \qquad dw = w_1 dx_1 + w_2 dx_2 + w_3 dx_3$$

$$\xi_1 = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \qquad \xi_2 = \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix} \qquad \xi_3 = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

so ist (1)

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} = \xi_3 \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} + \xi_1 \begin{vmatrix} dx_2 & dx_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} + \xi_2 \begin{vmatrix} dx_3 & dx_1 \\ x_3 & x_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 & w_1 dx_1 + w_2 dx_2 + w_3 dx_3 \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 & w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \end{vmatrix}$$

Unter der Voraussetzung, dass v, w homogene Functionen von α, β Dimensionen sind, hat man $v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = \alpha v$, u. s. w., folglich*)

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dv & dw \\ \alpha v & \beta w \end{vmatrix}$$

8. Ein System von n^2 Elementen c, dessen Subdeterminanten $(m+1)$ten und höhern Grades alle null sind, kann aus je m Colonnen gegebener Systeme von n^2 Elementen a und b componirt werden. Unter der Voraussetzung $c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + \ldots + a_{im} b_{km}$ ist jede Determinante $(m+1)$ten und höhern Grades des componirten Systems null (1).

Ein System, welches in den ersten m Zeilen je n, in den folgenden $n-m$ Zeilen je m gegebene Elemente hat, und in welchem eine Subdeterminante $m$ten Grades nicht null ist, kann durch $(n-m)^2$ bestimmte Elemente zu einem System von n^2 Elementen ergänzt werden, in welchem alle Subdeterminanten $(m+1)$ten und höhern Grades null sind. Unter der Voraussetzung, dass $d = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm}$ nicht null ist, bilde man**)

---

*) Aronhold 1862 Crelle J. 61 p. 100.

**) Kronecker 1864 Crelle J. 72 p. 152.

$$d_{ik} = \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{i1} & \cdot\cdot & a_{im} \\ a_{1k} & a_{11} & \cdot\cdot & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{mk} & a_{m1} & \cdot\cdot & a_{mm} \end{vmatrix} = d\,a_{ik} - d\,c_{ik}$$

$$-d\,c_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & a_{i1} & a_{i2} & \cdot \\ a_{1k} & a_{11} & a_{12} & \cdot \\ a_{2k} & a_{21} & a_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = a_{i1}\,b_{k1} + \ldots + a_{im}\,b_{km}$$

$$b_{k1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot \\ a_{1k} & a_{11} & a_{12} & \cdot \\ a_{2k} & a_{21} & a_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = -(k\,2\,3\ldots), \quad b_{k2} = -(1\,k\,3\ldots), \ldots$$

Dann sind in dem System der n^2 Elemente c alle Subdeterminanten $(m+1)$ten und höhern Grades null. Die Determinanten $d_{1k}, \ldots, d_{mk}, d_{i1}, \ldots, d_{im}$ sind null (§. 2, 3); also ist in den ersten m Zeilen, sowie in den ersten m Colonnen der folgenden Zeilen $c_{ik} = a_{ik}$. Die übrigen $(n-m)^2$ Elemente c_{ik} sind nach Vorschrift zu berechnen:

$$c_{ik} = \frac{-1}{d} \begin{vmatrix} 0 & a_{i1} & \cdot\cdot & a_{im} \\ a_{1k} & a_{11} & \cdot\cdot & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{mk} & a_{m1} & \cdot\cdot & a_{mm} \end{vmatrix}$$

Von den Adjuncten b haben

$$\begin{matrix} b_{11} & \cdot\cdot & b_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ b_{m1} & \cdot\cdot & b_{mm} \end{matrix}$$

die Eigenschaft, dass die nicht-diagonalen null sind als Determinanten von Systemen mit zwei gleichen Colonnen, während die diagonalen den Werth $-d$ haben, weil $d_{i1} = a_{i1}\,b_{11} + a_{i1}\,d = 0$, u. s. w.

9. Wenn $x_1, \ldots, x_n$ homogene lineare Functionen der Variablen $x_1', \ldots, x_n'$ sind, wenn diese Variablen eben solche Functionen der Variablen $x_1'', \ldots, x_n''$ sind, u. s. w., und zwar

$$(1)\left\{\begin{array}{l} x_1 \;\; = a_{11}\, x_1' \; + \,.\,.\, + a_{1n}\, x_n' \\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ x_n \;\; = a_{n1}\, x_1' \; + \,.\,.\, + a_{nn}\, x_n' \end{array}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{array}{l} x_1' = a_{11}'\, x_1'' + \,.\,.\, + a_{1n}'\, x_n'' \\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ x_n' = a_{n1}'\, x_1'' + \,.\,.\, + a_{nn}'\, x_n'' \end{array}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{array}{l} x_1'' = a_{11}'\, x_1''' + \,.\,.\, + a_{1n}''\, x_n''' \\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ x_n'' = a_{n1}''\, x_1''' + \,.\,.\, + a_{nn}''\, x_n''' \end{array}\right.$$

u. s. w., so erhält man durch successive Substitutionen*)

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{array}{l} x_1 = (a,\, a')_{11}\, x_1'' + \,.\,.\, + (a,\, a')_{1n}\, x_n'' \\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ x_n = (a,\, a')_{n1}\, x_1'' + \,.\,.\, + (a,\, a')_{nn}\, x_n'' \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{II})\left\{\begin{array}{l} x_1 = (a,\, a',\, a'')_{11}\, x_1''' + \,.\,.\, + (a,\, a',\, a'')_{1n}\, x_n''' \\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ x_n = (a,\, a',\, a'')_{n1}\, x_1''' + \,.\,.\, + (a,\, a',\, a'')_{nn}\, x_n''' \end{array}\right.$$

u. s. w. Der βte Coefficient der αten Zeile des Systems (I)

$$(a,\, a')_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma}\, a'_{\gamma\beta} = a_{\alpha 1}\, a'_{1\beta} + \,.\,.\, + a_{\alpha n}\, a'_{n\beta}$$

ist aus der αten Zeile des Systems (1) und der βten Colonne des Systems (2) componirt. Ebenso ist der Coefficient $(a,\, a',\, a'')_{\alpha\beta}$ aus der αten Zeile des Systems (I) und der βten Colonne des Systems (3) componirt, folglich

$$(a,\, a',\, a'')_{\alpha\beta} = \sum_{\delta}(a,\, a')_{\alpha\delta}\, a''_{\delta\beta} = \sum_{\gamma\delta} a_{\alpha\gamma}\, a'_{\gamma\delta}\, a''_{\delta\beta}$$

u. s. w. Man bezeichne ferner durch A, A', A'', .. die Determinanten $n$ten Grades der zusammenzusetzenden Systeme, deren Elemente $a_{\alpha\beta}$, $a'_{\alpha\beta}$, $a''_{\alpha\beta}$, .. sind; durch $(A,\, A')$, $(A,\, A',\, A'')$, .. die Determinanten der componirten Systeme, deren Elemente $(a,\, a')_{\alpha\beta}$, $(a,\, a',\, a'')_{\alpha\beta}$, .. sind; durch

$$A_{\alpha\beta},\; A'_{\alpha\beta},\, .\,.,\; (A,\, A')_{\alpha\beta},\; (A,\, A',\, A'')_{\alpha\beta},\, .\,.$$

---

*) Mittheilung von Weierstrass bei Gelegenheit der Abhandlung über bilineare und quadratische Formen, Berliner Monatsbericht 1868 Mai 18.

die Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades, mit welchen in den Determinanten $A, A', .., (A, A'), (A, A', A''), ..$ die Elemente

$$a_{\alpha\beta},\ a'_{\alpha\beta}, .., (a, a')_{\alpha\beta},\ (a, a', a'')_{\alpha\beta}, ..$$

multiplicirt sind; durch

$$A_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'},\ A'_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'},\ (A, A')_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'},\ (A, A', A'')_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'}, ..$$

die Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades, mit welchen in den Determinanten $A, A', .., (A, A'), (A, A', A''), ..$ die Subdeterminanten 2ten Grades

$$\Sigma \pm a_{\alpha\beta}\, a_{\alpha'\beta'},\ \Sigma \pm a'_{\alpha\beta}\, a'_{\alpha'\beta'},\ \Sigma \pm (a, a')_{\alpha\beta}\, (a, a')_{\alpha'\beta'},$$
$$\Sigma \pm (a, a', a'')_{\alpha\beta}\, (a, a', a'')_{\alpha'\beta'}, ..$$

multiplicirt sind, u. s. w. Dann ist nach (1)

$$\begin{aligned}
(A, A') &= AA' \\
(A, A')_{\alpha\beta} &= \sum_{\gamma} A_{\alpha\gamma}\, A'_{\gamma\beta} \\
(A, A')_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'} &= \sum_{\gamma\gamma'} A_{\alpha\gamma\ \alpha'\gamma'}\, A'_{\gamma\beta\ \gamma'\beta'} \\
(A, A')_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'\ \alpha''\beta''} &= \sum_{\gamma\gamma'\gamma''} A_{\alpha\gamma\ \alpha'\gamma'\ \alpha''\gamma''}\, A'_{\gamma\beta\ \gamma'\beta'\ \gamma''\beta''}
\end{aligned}$$

u. s. w. Die Glieder dieser Summen werden dadurch gebildet, dass man für $\gamma, \gamma\gamma', \gamma\gamma'\gamma'', ..$ alle Combinationen von je 1, 2, 3, .. verschiedenen Nummern der Reihe 1 bis n setzt. Denn es ist z. B.

$$(A, A')_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'\ \alpha''\beta''}$$

eine Subdeterminante $(n-3)$ten Grades der Elemente (a, a'); die ersten Nummern dieser Elemente bleiben von der Reihe 1 bis n übrig nach Ausschliessung von $\alpha, \alpha', \alpha''$, und stimmen mit den ersten Nummern der Elemente in $A_{\alpha\gamma\ \alpha'\gamma'\ \alpha''\gamma''}$ überein; die zweiten Nummern jener Elemente bleiben von der Reihe 1 bis n übrig nach Ausschliessung von β, β', β'', und stimmen mit den zweiten Nummern der Elemente in $A'_{\gamma\beta\ \gamma'\beta'\ \gamma''\beta''}$ überein; dagegen sind die zweiten Nummern der Elemente in $A_{\alpha\gamma\ \alpha'\gamma'\ \alpha''\gamma''}$ sowie die ersten Nummern in $A'_{\gamma\beta\ \gamma'\beta'\ \gamma''\beta''}$ alle Combinationen von je $n-3$ verschiedenen Nummern der Reihe 1 bis n.

Ebenso ist

$$(A, A', A'') = (A, A')A'' = AA'A''$$

$$(A, A', A'')_{\alpha\beta} = \sum_{\delta}(A, A')_{\alpha\delta} A''_{\delta\beta} = \sum_{\gamma\delta} A_{\alpha\gamma} A'_{\gamma\delta} A''_{\delta\beta}$$

$$(A, A', A'')_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'} = \sum_{\delta\delta'}(A, A')_{\alpha\delta\ \alpha'\delta'} A''_{\delta\beta\ \delta'\beta'}$$

$$= \sum_{\gamma\gamma'\delta\delta'} A_{\alpha\gamma\ \alpha'\gamma'} A'_{\gamma\delta\ \gamma'\delta'} A''_{\delta\beta\ \delta'\beta'}$$

$$(A, A', A'')_{\alpha\beta\ \alpha'\beta'\ \alpha''\beta''} = \sum_{\delta\delta'\delta''}(A, A')_{\alpha\delta\ \alpha'\delta'\ \alpha''\delta''} A''_{\delta\beta\ \delta'\beta'\ \delta''\beta}$$

$$= \sum_{\gamma\gamma'\gamma''\delta\delta'\delta''} A_{\alpha\gamma\ \alpha'\gamma'\ \alpha''\gamma''} A'_{\gamma\delta\ \gamma'\delta'\ \gamma''\delta''} A''_{\delta\beta\ \delta'\beta'\ \delta''\beta''}$$

u. s. w. Die Glieder dieser Summen werden dadurch gebildet, dass man sowohl für γ, $\gamma\gamma'$, $\gamma\gamma'\gamma''$, .. als auch für δ, $\delta\delta'$, $\delta\delta'\delta''$, .. alle Combinationen von je 1, 2, 3, .. verschiedenen Nummern der Reihe 1 bis n setzt.

Ueberhaupt ist jede Subdeterminante des Systems der componirten Elemente $(a, a', .., a^{(\lambda)})$ darstellbar als Summe von Producten aus $(\lambda + 1)$ Factoren, welche Subdeterminanten derselben Ordnung der Systeme der einfachen Elemente a, a', .., $a^{(\lambda)}$ sind.

§. 7. Determinanten eines Systems von Subdeterminanten.

1. Die Determinante des Systems der Adjuncten der n^2 Elemente eines gegebenen Systems ist die $(n-1)$te Potenz der Determinante des Systems der Elemente*).

Beweis. Nach der Multiplicationsregel (§. 6, 4) ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ . & .. & . \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & .. & \alpha_{1n} \\ . & .. & . \\ \alpha_{n1} & .. & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & .. & c_{1n} \\ . & .. & . \\ c_{n1} & .. & c_{nn} \end{vmatrix}$$

Das componirte Element

$$c_{ik} = a_{i1}\alpha_{k1} + .. + a_{in}\alpha_{kn}$$

hat den Werth R oder 0, je nachdem k und i gleich oder verschieden sind (§. 3, 2). Also reducirt sich die Determinante des componirten Systems auf das Anfangsglied $c_{11} c_{22} .. c_{nn} = R^n$ (§. 3, 3). Daher ist

*) Cauchy l. c. p. 82. Für $n = 3$ findet man diesen und den folgenden Satz bei Lagrange sur les pyr. 5 und bei Gauss Disq. arithm. 267.

$$R \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot\ \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot\ \cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = R^n$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot\ \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot\ \cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}^{n-1}$$

2. Eine Subdeterminante $h$ten Grades des Systems α (der Adjuncten) hat zu der Adjuncte der entsprechenden Subdeterminante des Systems a (der Elemente) das Verhältniss R^{h-1}. Subdeterminanten desselben Grades des Systems α verhalten sich zu einander, wie die Adjuncten der entsprechenden Subdeterminanten des Systems a*).

Beweis. Wenn die Subdeterminante $h$ten Grades $\Sigma \pm a_{fi}\, a_{gk} \,..$ des Systems a die Adjuncte $\Sigma \pm a_{ru}\, a_{sv} \,..$ hat, so dass

$$\Sigma \pm a_{fi}\, a_{gk} \,..\, a_{ru}\, a_{sv} \,.. = \Sigma \pm a_{11} \,..\, a_{nn} = R$$

so wird die entsprechende Subdeterminante $h$ten Grades

$$\Sigma \pm \alpha_{fi}\, \alpha_{gk} \,..$$

des Systems α als Determinante $n$ten Grades

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} & \cdot\ \cdot & \alpha_{fu} & \alpha_{fv} & \cdot\ \cdot \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} & \cdot\ \cdot & \alpha_{gu} & \alpha_{gv} & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & \cdot\ \cdot & 1 & 0 & \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & \cdot\ \cdot & 0 & 1 & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \end{vmatrix}$$

dargestellt (§. 3, 3). Durch Composition der Zeilen der Systeme

$$\begin{matrix} a_{fi} & a_{fk} & \cdot\ \cdot & a_{fu} & a_{fv} & \cdot\ \cdot \\ a_{gi} & a_{gk} & \cdot\ \cdot & a_{gu} & a_{gv} & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{ri} & a_{rk} & \cdot\ \cdot & a_{ru} & a_{rv} & \cdot\ \cdot \\ a_{si} & a_{sk} & \cdot\ \cdot & a_{su} & a_{sv} & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} & \cdot\ \cdot & \alpha_{fu} & \alpha_{fv} & \cdot\ \cdot \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} & \cdot\ \cdot & \alpha_{gu} & \alpha_{gv} & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & \cdot\ \cdot & 1 & 0 & \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & \cdot\ \cdot & 0 & 1 & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \end{matrix}$$

---

*) Jacobi Det. 11 hatte diesen Satz durch algebraische Betrachtungen gefunden. Der directe Beweis ist von Borchardt angegeben worden. Briefl. Mittheilung 1853 Juli.

findet man das System

$$\begin{matrix} R & 0 & . & . & a_{fu} & a_{fv} & . & . \\ 0 & R & . & . & a_{gu} & a_{gv} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{ru} & a_{rv} & . & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{su} & a_{sv} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

mit der Determinante (§. 4, 2)

$$\begin{vmatrix} R & 0 & . \\ 0 & R & . \\ . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{ru} & a_{rv} & . \\ a_{su} & a_{sv} & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = R^h \Sigma \pm a_{ru} a_{sv} \, . \, .$$

Also ist $R\Sigma \pm \alpha_{fi}\,\alpha_{gk} \, . \, . = R^h \Sigma \pm a_{ru}\,a_{sv} \, . \, . \, ,$

$$\Sigma \pm \alpha_{fi}\,\alpha_{gk} \, . \, . : \Sigma \pm a_{ru}\,a_{sv} \, . \, . = R^{h-1}$$

Aus der Identität $R(\Sigma \pm \alpha_{fi}\,\alpha_{gk} \, . \, . - R^{h-1}\,\Sigma \pm a_{ru}\,a_{sv} \, . \, .) = 0$ schliesst man, dass bei einem System von n^2 beliebigen Elementen

$$\Sigma \pm \alpha_{fi}\,\alpha_{gk} \, . \, . - R^{h-1}\,\Sigma \pm a_{ru}\,a_{sv} \, . \, . = 0$$

eine Identität ist, also auch bei einem System, dessen Determinante $R = 0$. Vergl. §. 3, 8.

Beispiele. Wenn $R = \Sigma \pm a_{11}\,a_{22} \, . \, . \, a_{nn}$, so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & . \; . & \alpha_{1m} \\ . & . \; . & . \\ \alpha_{m1} & . \; . & \alpha_{mm} \end{vmatrix} = R^{m-1} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & . \; . & a_{m+1,n} \\ . & . \; . & . \\ a_{n,m+1} & . \; . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{k+1,k+1} & . \; . & \alpha_{k+1,n} \\ . & . \; . & . \\ \alpha_{n,k+1} & . \; . & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = R^{n-k-1} \begin{vmatrix} a_{11} & . \; . & a_{1k} \\ . & . \; . & . \\ a_{k1} & . \; . & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Wenn insbesondere $n = 5$ ist, so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \\ \alpha_{51} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \end{vmatrix} = R^2 \begin{vmatrix} a_{15} & a_{12} \\ a_{35} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{41} & \alpha_{43} \end{vmatrix} = R \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Die Subdeterminante $(n-1)$ten Grades des Systems α, deren Adjuncte a_{ik} ist, hat den Werth $R^{n-2}\, a_{ik}$*)

Wenn insbesondere $n = 3$, so ist**)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = R a_{33}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} = R a_{31} \text{ u. s. w.}$$

Wenn $S = \Sigma \pm a_{00}\, a_{11} \ldots$, so ist

$$\begin{vmatrix} \operatorname{adj} a_{00} & \operatorname{adj} a_{01} \\ \operatorname{adj} a_{10} & \operatorname{adj} a_{11} \end{vmatrix} = S \,.\, \operatorname{adj} \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix}$$

Nach den Voraussetzungen §. 5,7 ist $\operatorname{adj} a_{00} = 0$, $\operatorname{adj}(a_{00} a_{11} - a_{01} a_{10}) = \alpha_{11}$, folglich

$$-\operatorname{adj} a_{10} \operatorname{adj} a_{01} = S \alpha_{11}$$

3. Die Adjuncte der Subdeterminante $h$ten Grades $\Sigma \pm a_{fi}\, a_{gk} \ldots$, deren man zur Berechnung der Subdeterminante $\Sigma \pm \alpha_{fi}\, \alpha_{gk} \ldots$ bedarf, kann durch einen Differentialcoefficienten $h$ter Ordnung der Determinante R ausgedrückt werden (§. 3, 14). Es ist***)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} \end{vmatrix} = R \frac{\partial^2 R}{\partial a_{fi}\, \partial a_{gk}}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} & \alpha_{fl} \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} & \alpha_{gl} \\ \alpha_{hi} & \alpha_{hk} & \alpha_{hl} \end{vmatrix} = R^2 \frac{\partial^3 R}{\partial a_{fi}\, \partial a_{gk}\, \partial a_{hl}} \text{ u. s. w.}$$

Diese Identitäten geben zugleich an, wie man zweite, dritte, .. Differentialcoefficienten einer Determinante durch erste Differentialcoefficienten derselben ausdrücken kann.

Beispiele. I. Weil (§. 3, 15) $dR = \sum_{ik} \alpha_{ik}\, da_{ik}$ und

$$d\alpha_{rs} = \sum_{ik} \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial a_{ik}}\, da_{ik} = \sum_{ik} \frac{\partial^2 R}{\partial a_{rs}\, \partial a_{ik}}\, da_{ik}$$

ist, so findet man

*) Cauchy l. c. p. 82.
**) Lagrange sur les pyr. 3.
***) Jacobi Det. 10.

$$R\,d\alpha_{rs} = \sum_{ik}(\alpha_{rs}\,\alpha_{ik} - \alpha_{is}\,\alpha_{rk})\,d\alpha_{ik}$$

$$R\,d\alpha_{rs} - \alpha_{rs}\,dR = -\sum_{ik}\alpha_{is}\,\alpha_{rk}\,d\alpha_{ik}$$

$$R^2 d\frac{\alpha_{rs}}{R} = -\sum_{ik}\alpha_{is}\,\alpha_{rk}\,d\alpha_{ik}{}^{*)}$$

II. Wenn $V_{r+1} = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{r+1,r+1}$, so ist (2)

$$\begin{vmatrix} \text{adj}\, a_{rr} & \text{adj}\, a_{r,r+1} \\ \text{adj}\, a_{r+1,r} & \text{adj}\, a_{r+1,r+1} \end{vmatrix} = V_{r+1} \,.\, \text{adj} \begin{vmatrix} a_{rr} & a_{r,r+1} \\ a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} \end{vmatrix}$$

Nun ist

$$\text{adj}\, a_{r+1,r+1} = V_r \qquad \text{adj} \begin{vmatrix} a_{rr} & a_{r,r+1} \\ a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} \end{vmatrix} = V_{r-1}$$

folglich

$$V_r\, \text{adj}\, a_{rr} - \text{adj}\, a_{r,r+1}\, \text{adj}\, a_{r+1,r} = V_{r+1}\, V_{r-1}$$

Wenn insbesondere die correspondirenden Elemente a_{ik} und a_{ki} gleich oder conjugirt complex sind, so sind die Adjuncten der Elemente $a_{r,r+1}$ und $a_{r+1,r}$ gleich oder conjugirt complex (§. 3, 5), ihr Product real und positiv. Also haben, während V_r verschwindet, V_{r+1} und V_{r-1} Werthe von entgegengesetzten Zeichen**).

4. Wenn die Subdeterminanten des Quadrats von $(1+n)^2$ Elementen a durch die Zeilen-Nummern der Elemente mit den darübergesetzten Colonnen-Nummern bezeichnet werden:

$$S = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{0m} & \cdot\,\cdot & a_{0n} \\ a_{m0} & a_{mm} & \cdot\,\cdot & a_{mn} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{nm} & \cdot\,\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & m & \cdot\,\cdot & n \\ 0 & m & \cdot\,\cdot & n \end{vmatrix}$$

$$\text{adj}\, a_{00} = \begin{vmatrix} m & \cdot\,\cdot & n \\ m & \cdot\,\cdot & n \end{vmatrix} \qquad \text{adj}\, a_{mm} = \begin{vmatrix} 0 & m+1 & \cdot\,\cdot & n \\ 0 & m+1 & \cdot\,\cdot & n \end{vmatrix}$$

$$\text{adj}\, a_{m0} = -\begin{vmatrix} m & m+1 & \cdot\,\cdot & n \\ 0 & m+1 & \cdot\,\cdot & n \end{vmatrix} \qquad \text{adj}\, a_{0m} = -\begin{vmatrix} 0 & m+1 & \cdot\,\cdot & n \\ m & m+1 & \cdot\,\cdot & n \end{vmatrix}$$

so ist (2)

$$\begin{vmatrix} \text{adj}\, a_{00} & \text{adj}\, a_{0m} \\ \text{adj}\, a_{m0} & \text{adj}\, a_{mm} \end{vmatrix} = S\, \text{adj} \begin{vmatrix} a_{00} & a_{0m} \\ a_{m0} & a_{mm} \end{vmatrix}$$

---

*) Weierstrass Berl. Monatsbericht 1858 p. 214.

**) Brioschi Det. p. 72.

$$\begin{vmatrix} m & m+1 & . \\ m & m+1 & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & m+1 & . \\ 0 & m+1 & . \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & m+1 & . \\ m & m+1 & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m & m+1 & . \\ 0 & m+1 & . \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & m & . \\ 0 & m & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m+1 & . \\ m+1 & . \end{vmatrix}$$

oder, wenn die Nenner nicht null sind,

$$\frac{\begin{vmatrix} 0 & m+1 & . \\ m & m+1 & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m & m+1 & . \\ 0 & m+1 & . \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & . \\ m & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m+1 & . \\ m+1 & . \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & m+1 & . \\ 0 & m+1 & . \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m+1 & . \\ m+1 & . \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} 0 & m & . \\ 0 & m & . \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & . \\ m & . \end{vmatrix}}$$

Bei $m = 0$ ist $\begin{vmatrix} 0 & m & . \\ 0 & m & . \end{vmatrix} = 0$. Bei $m = n$ ist $S = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{0n} \\ a_{n0} & a_{nn} \end{vmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} m & m+1 & . \\ 0 & m+1 & . \end{vmatrix} = -a_{0n} \qquad \begin{vmatrix} 0 & m+1 & . \\ m & m+1 & . \end{vmatrix} = -a_{n0}$$
$$\begin{vmatrix} m & m+1 & . \\ m & m+1 & . \end{vmatrix} = a_{nn} \qquad \begin{vmatrix} 0 & m+1 & . \\ 0 & m+1 & . \end{vmatrix} = a_{00}$$

also $\begin{vmatrix} m+1 & . \\ m+1 & . \end{vmatrix} = 1$. Setzt man daher $m = 0, 1, .., n$, und summirt man einerseits die entsprechenden Werthe des Bruches, andrerseits die entsprechenden Differenzen, so erhält man*)

$$\Sigma \frac{\begin{vmatrix} 0 & m+1 & . \\ m & m+1 & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m & m+1 & . \\ 0 & m+1 & . \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & . \\ m & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m+1 & . \\ m+1 & . \end{vmatrix}} = a_{00}$$

5. Eine Determinante $n$ten Grades kann unter Einführung zweier nicht proportionaler Reihen von je n Unbestimmten durch eine Determinante 2ten Grades ausgedrückt werden**). Zu diesem Zweck entwickle man die gegebene Determinante nach den Subdeterminanten von 2 Zeilen (§. 4, 1) z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & . & . & a_5 \\ . & . & . & . \\ e_1 & . & . & e_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & c_4 & c_5 \\ d_3 & d_4 & d_5 \\ e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} + ..$$

Nachdem man die beiden Zeilen des Systems durch die Unbe-

*) Kronecker Berl. Monatsbericht 1874 März.
**) S. den Aufsatz des Verf. Leipziger Berichte 1873 p. 533.

stimmten $u_1 \ldots u_5$ und $v_1 \ldots v_5$ ersetzt hat, bilde man die Determinante des veränderten Systems

$$w = \begin{vmatrix} u_1 & \ldots & u_5 \\ v_1 & \ldots & v_5 \\ c_1 & \ldots & c_5 \\ d_1 & \ldots & d_5 \\ e_1 & \ldots & e_5 \end{vmatrix}$$

nebst den Adjuncten

$$\begin{array}{lcl} x_1 \ldots x_5 & \text{der Elemente} & u_1 \ldots u_5 \\ y_1 \ldots y_5 & & v_1 \ldots v_5 \end{array}$$

Nun ist (2)

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = w \begin{vmatrix} c_3 & c_4 & c_5 \\ d_3 & d_4 & d_5 \\ e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix}$$

u. s. w., folglich ist

$$w \begin{vmatrix} a_1 & \ldots & a_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1 & \ldots & e_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \ldots$$

die Entwickelung von (§. 6, 1)

$$\begin{vmatrix} a_1 & \ldots & a_5 \\ b_1 & \ldots & b_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & \ldots & x_5 \\ y_1 & \ldots & y_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots & a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots & b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots \end{vmatrix}$$

so dass die Grössen x von den Grössen v, die Grössen y von den Grössen u, und w von beiderlei Grössen lineare Formen sind.

6. Analoge Sätze gelten, wenn p_{ik} eine Subdeterminante $m$ten Grades des Systems von n^2 Elementen a, dessen Determinante R, und q_{ik} die Adjuncte der p_{ik} ist, für die adjungirten Systeme (§. 2, 4 u. 5, §. 4, 1)

$$\begin{array}{cccc} p_{11} & \ldots & p_{1\mu} & \quad q_{11} & \ldots & q_{1\mu} \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \quad \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ p_{\mu 1} & \ldots & p_{\mu\mu} & \quad q_{\mu 1} & \ldots & q_{\mu\mu} \end{array}$$

Die Determinanten derselben sind Potenzen von R, nämlich*)

$$\Sigma \pm p_{11} \ldots p_{\mu\mu} \, \Sigma \pm q_{11} \ldots q_{\mu\mu} = R^{\mu}$$

$$\Sigma \pm p_{11} \ldots p_{\mu\mu} = R^{\binom{n-1}{m-1}} \qquad \Sigma \pm q_{11} \ldots q_{\mu\mu} = R^{\binom{n-1}{m}}$$

---

*) Diese Bemerkungen sind die erste von Cauchy l. c. p. 102, die beiden andern von Franke 1862 Crelle J. 61 p. 350 gemacht worden.

Beweis. Das Product $\Sigma \pm p_{11} \dots p_{\mu\mu} \Sigma \pm q_{11} \dots q_{\mu\mu}$ ist eine Determinante μten Grades, welche sich auf ihr Anfangsglied R^μ reducirt, weil ihr Element

$$p_{\gamma 1} q_{\delta 1} + \dots + p_{\gamma\mu} q_{\delta\mu}$$

den Werth R oder 0 hat, je nachdem die Nummern γ und δ übereinstimmen oder nicht (§. 4, 1).

Da nun $P = \Sigma \pm p_{11} \dots p_{\mu\mu}$ ein Divisor von R^μ und R eine Function ersten Grades eines Elements z. B. a_{11} ist, so kann P von einer Potenz von R nur durch einen von den Elementen a unabhängigen Coefficienten unterschieden sein. Unter den $\mu = \binom{n}{m}$ Combinationen der Nummern 1 bis n giebt es $\lambda = \binom{n-1}{m-1}$ solche, in denen 1 vorkommt. Es giebt also λ Elemente p z. B. p_{11}, $p_{22}, \dots, p_{\lambda\lambda}$, welche Functionen ersten Grades von a_{11} sind, mithin ist $P = \alpha R^\lambda$. Wenn insbesondere die nicht diagonalen Elemente a null, die diagonalen 1 sind, so sind die nicht diagonalen Elemente p null, die diagonalen 1, $R = 1$, $P = 1$, folglich ist $\alpha = 1$,

$$P = R^\lambda, \quad Q = \Sigma \pm q_{11} \dots q_{\mu\mu} = R^{\mu-\lambda}$$

7. Eine Subdeterminante $h$ten Grades des Systems q hat zur Adjuncte der entsprechenden Subdeterminante des Systems p das Verhältniss $R^h : P$. Subdeterminanten desselben Grades des Systems q verhalten sich zu einander, wie die Adjuncten der entsprechenden Subdeterminanten des Systems p*).

Wie oben (2) findet man die Identitäten

$$P \Sigma \pm q_{fi} q_{gk} \dots = R^h \operatorname{adj} \Sigma \pm p_{fi} p_{gk} \dots$$
$$Q \Sigma \pm p_{fi} p_{gk} \dots = R^h \operatorname{adj} \Sigma \pm q_{fi} q_{gk} \dots$$

folglich

$$\Sigma \pm q_{fi} q_{gk} \dots : \operatorname{adj} \Sigma \pm p_{fi} p_{gk} \dots = R^{h-\lambda}$$
$$\Sigma \pm p_{fi} p_{gk} \dots : \operatorname{adj} \Sigma \pm q_{fi} q_{gk} \dots = R^{h-(\mu-\lambda)}$$

Wenn $R = 0$, so sind alle Subdeterminanten $(\lambda+1)$ten und höhern Grades des Systems q, so wie alle Subdeterminanten $(\mu-\lambda+1)$ten und höhern Grades des Systems p null. Vergl. §. 3, 8.

---

*) Franke l. c. und Borchardt's Anmerkung zu diesem Aufsatz.

Zweiter Abschnitt.

Anwendungen der Determinanten.

§. 8. Lösung eines Systems von linearen Gleichungen.

1. I. Wenn $u_1, \ldots, u_n$ lineare Formen (homogene Functionen) der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ sind, nämlich

$$u_1 = a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$u_n = a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n$$

so heisst die Determinante $n$ten Grades der Coefficienten

$$R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$$

die Determinante der linearen Formen $u_1, \ldots, u_n$*), weil, wenn sie null wird, die Unabhängigkeit dieser Formen von einander verloren geht.

Wenn die Determinante R nicht null ist, so gehört zu jedem System von endlichen Werthen $u_1, \ldots, u_n$ ein bestimmtes System von endlichen Werthen $x_1, \ldots, x_n$. Man findet

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} x_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1,k-1} & u_1 & a_{1,k+1} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{n,k-1} & u_n & a_{n,k+1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

indem man in R die $k$te Colonne mit x_k multiplicirt, und dann die übrigen der Reihe nach mit $x_1, x_2, \ldots$ multiplicirten Colonnen zur $k$ten Colonne addirt (§. 3, 7).

Nach Berechnung der Adjuncten aller Colonnen erhält man, wenn die Adjuncte des Elements a_{ik} durch α_{ik} bezeichnet wird**),

$$R x_k = \alpha_{1k} u_1 + \ldots + \alpha_{nk} u_n$$

---

*) Jacobi Det. 7.

**) Diese Auflösung ist die von Leibniz, später von Cramer angegebene. Vergl. §. 1 und §. 2.

Denn von der Summe $\alpha_{1k} u_1 + \ldots + \alpha_{nk} u_n$ bleibt nur das Glied Rx_k übrig, weil $\alpha_{1k} a_{1i} + \ldots + \alpha_{nk} a_{ni}$ den Werth 0 oder R hat, je nachdem i von k verschieden ist oder nicht (§. 3, 2).

II. Aus dem System

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{vmatrix} ax + c & b \\ a'x + c' & b' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & by + c \\ a' & b'y + c' \end{vmatrix} = 0$$

d. i. $(ab)x + (cb) = 0$, $(ac) + (ab)y = 0$, oder

$$x : y : 1 = (bc) : (ca) : (ab)$$

Wenn $(ab) = 0$, so sind x, y unendlich, und genügen der Gleichung

$$ax + by = 0, \qquad x : y = -b : a$$

oder sie sind nur durch die eine Gleichung $ax + by + c = 0$ verbunden, mit der die andre Gleichung congruirt.

III. Aus dem System

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' &= 0 \end{aligned}$$

folgt in gleicher Weise

$$\begin{vmatrix} ax + d & b & c \\ a'x + d' & b' & c' \\ a''x + d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0, \quad (abc)x + (dbc) = 0, \text{ u. s. w.}$$

$$x : y : z : 1 = (dbc) : (adc) : (abd) : -(abc)$$

Wenn $(abc) = a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' = 0$, so ist bei allen x, y, z

$$\alpha(ax + by + cz + d) + \alpha'(a'x + \ldots) + \alpha''(a''x + \ldots) = 0$$

d. h. die Gleichungen sind **nicht unabhängig von einander.** Wenn z. B. α'' nicht null, so genügen der dritten Gleichung die x, y, z, welche den beiden ersten Gleichungen genügen. Diese Werthe sind **entweder nicht alle endlich, oder nicht alle bestimmt,** so dass z. B.

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \end{aligned} \qquad x : y : z = (bc) : (ca) : (ab)$$

wo $(bc) = a''$ nicht null; oder sie genügen den Gleichungen

$$\begin{matrix} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{matrix} \qquad x : y : 1 = (bZ) : (Za) : (ab)$$

wo $Z = cz + d$; oder den Gleichungen

$$(a,\ by + cz + d) = 0, \quad (b,\ cz + d + ax) = 0, \ldots$$
$$(ax + by,\ cz + d) = 0, \ldots$$

IV. Die gegebene lineare Form der x

$$v = c_1 x_1 + \ldots c_n x_n$$

kann als lineare Form der $u_1, \ldots, u_n$ (I) dargestellt werden, wenn deren Determinante R nicht null ist. Denn bei allen x findet man durch Transformation der ersten Colonne

$$\begin{vmatrix} v & c_1 & c_2 & . \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & . \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = 0, \qquad Rv + \begin{vmatrix} 0 & c_1 & c_2 & . \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & . \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} = 0$$

2. Lösung des Systems von **homogenen** linearen Gleichungen (1. I)

$$u_1 = 0, \ldots, u_n = 0 \quad \text{für} \quad x_1, \ldots, x_n$$

I. Wenn die Determinante $n$ten Grades (R) nicht null ist, so wird dem gegebenen System von Gleichungen nur durch die Werthe $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ genügt. Bei allen x ist nach Transformation der 1ten, 2ten, .. Colonne

$$\begin{vmatrix} u_1 & a_{12} & a_{13} & . \\ u_2 & a_{22} & a_{23} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = Rx_1 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & u_1 & a_{13} & . \\ a_{21} & u_2 & a_{23} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = Rx_2$$

u. s. w. Zufolge des gegebenen Systems sind diese Werthe null. Nun ist die Determinante R nicht null, folglich $x_1 = 0$, u. s. w.

II. Wenn die Determinante $n$ten Grades null*), eine Subdeterminante $(n-1)$ten Grades nicht null ist, so ist das System

---

*) Jacobi Det. 7. Die Gleichung $R = 0$ (»aequatio resultans« Newton Arithm. univ. p. 58) heisst die **Resultante** der linearen Gleichungen $u_1 = 0, \ldots, u_n = 0$. Bézout Hist. de l'Acad. de Paris 1764 p. 288.

der Gleichungen 1fach unbestimmt, eine Gleichung desselben überflüssig: wenn z. B. adj a_{11} nicht null ist, so ist u_1 eine lineare Form der übrigen u, und x_1 bleibt unbestimmt. Bei allen x ist

$$\begin{vmatrix} u_1 & a_{12} & . \\ u_2 & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & . \\ a_{21}x_1 & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = Rx_1 = 0 \quad .$$

Durch Entwickelung der ersten Determinante nach der ersten Colonne findet man

$$b_1 u_1 + \ldots + b_n u_n = 0$$

Nun ist $b_1 = \mathrm{adj}\, a_{11}$ nicht null, also u_1 eine gegebene lineare Form der $u_2, \ldots, u_n$, die Gleichung $u_1 = 0$ überflüssig.

In der andern Determinante seien $\beta_1, \beta_2, \ldots$ die Adjuncten der ersten Zeile. Dann ist bei $r = 1, 2, \ldots, n$ (§. 3, 2)

$$a_{r1}x_1\beta_1 + a_{r2}\beta_2 + \ldots + a_{rn}\beta_n = 0$$

und das gegebene System hat die Lösung

$$1 : x_2 : x_3 : \ldots = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 : \ldots$$

weil $\beta_1 u_r = a_{r1}x_1\beta_1 + a_{r2}\beta_2 + \ldots + a_{rn}\beta_n = 0$. Hier ist $\beta_1 = \mathrm{adj}\, a_{11}$ nicht null; $\beta_2, \beta_3, \ldots$ sind theilbar durch x_1, welche unbestimmt bleibt.

Wenn adj a_{ik} nicht null ist, so findet man bei entsprechender Anordnung in gleicher Weise u_i als lineare Form der übrigen u, und die Lösung des Systems, welche x_k unbestimmt lässt.

III. Wenn die Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades null sind und eine Subdeterminante $(n-2)$ten Grades nicht null ist, so ist das System der Gleichungen 2fach unbestimmt, 2 Gleichungen desselben sind überflüssig*): wenn z. B.

$$\mathrm{adj} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

*) Die Unterscheidung der möglichen Fälle und die Angabe der entsprechenden Lösungen (»paullo prolixum negotium« Jacobi l. c.) war von Kronecker 1864 darauf zurückgeführt worden, dass man unter den Subdeterminanten $(n-1)$ten oder niedern Grades eine aufzusuchen hat, die nicht null ist. S. die 2te Auflage dieses Buchs 1864 p. 62. Ueber die Construction entsprechender Systeme von Gleichungen vergl. oben §. 6, 9.

nicht null ist, so sind u_1, u_2 lineare Formen der $u_3, .., u_n$, und x_1, x_2 bleiben unbestimmt. Bei $\alpha = 1, 2$ und bei allen x ist

$$\begin{vmatrix} u_\alpha & a_{\alpha 3} & . \\ u_3 & a_{33} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 & a_{\alpha 3} & . \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_3 & a_{33} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = R_1 x_1 + R_2 x_2 = 0$$

nach der ersten Voraussetzung. Die Entwickelung der ersten Determinante nach ihrer ersten Colonne giebt

$$c u_\alpha + c_3 u_3 + .. + c_n u_n = 0$$

wo c nicht null ist nach der zweiten Voraussetzung. Also ist u_α eine gegebene lineare Form der $u_3, .., u_n$, die Gleichungen $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ sind überflüssig.

In der andern Determinante seien $c, \gamma_3, \gamma_4, ..$ die Adjuncten der ersten Zeile. Dann ist bei $r = 1, 2, .., n$

$$(a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2) c + a_{r3} \gamma_3 + .. + a_{rn} \gamma_n = 0$$

und das gegebene System hat die Lösung

$$1 : x_3 : x_4 : .. = c : \gamma_3 : \gamma_4 : ..$$

weil $c u_r = (a_{r_1} x_1 + a_{r2} x_2) c + a_{r3} \gamma_3 + .. + a_{rn} \gamma_n = 0$. Hier ist c nicht null; $\gamma_3, \gamma_4, ..$ sind gegebene lineare Formen der x_1, x_2, während x_1, x_2 unbestimmt bleiben.

Wenn überhaupt

$$\text{adj} \begin{vmatrix} a_{il} & a_{im} \\ a_{kl} & a_{km} \end{vmatrix}$$

nicht null ist, so findet man bei entsprechender Anordnung in gleicher Weise u_i, u_k als lineare Formen der $n-2$ übrigen u. Nach Weglassung einer der beiden Gleichungen $u_i = 0$, $u_k = 0$ vereinigt man in dem System der übrigen $n-1$ Gleichungen die Glieder, welche x_l, x_m enthalten, zu je einem Glied. Die Determinante dieses Systems ist null; von den Adjuncten der ersten Zeile ist eine nicht null. Also hat das System eine Lösung, welche x_l, x_m unbestimmt lässt. U. s. w.

3. Zufolge der Kette von trinomischen homogenen linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 u &= b_1 u_1 + u_2 \\ a_2 u_1 &= b_2 u_2 + u_3 \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

ist

$$\frac{u_1}{u} = \frac{a_1}{b_1 + \frac{u_2}{u_1}} \qquad \frac{u_2}{u_1} = \frac{a_2}{b_2 + \frac{u_3}{u_2}} \qquad \cdots$$

mithin $\frac{u_1}{u}$ der aus den Gliedern $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots$ gebildete Kettenbruch. Sein aus k Gliedern successiv zu berechnender Näherungswerth ergiebt sich aus dem obigen linearen System unter der Voraussetzung $u_{k+1} = 0$. Wenn z. B.

$$\begin{array}{rcrrrr} a_1 u &=& b_1 u_1 + & u_2 & & \\ 0 &=& -a_2 u_1 + & b_2 u_2 + & u_3 & \\ 0 &=& * & -a_3 u_2 + & b_3 u_3 + & u_4 \\ 0 &=& * & * & -a_4 u_3 + & b_4 u_4 \end{array}$$

so ist (1)

$$\begin{vmatrix} b_1 & 1 & & \\ -a_2 & b_2 & 1 & \\ & -a_3 & b_3 & 1 \\ & & -a_4 & b_4 \end{vmatrix} u_1 = \begin{vmatrix} a_1 u & 1 & & \\ & b_2 & 1 & \\ & -a_3 & b_3 & 1 \\ & & -a_4 & b_4 \end{vmatrix} = a_1 u \begin{vmatrix} b_2 & 1 & \\ -a_3 & b_3 & 1 \\ & -a_4 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$\frac{u_1}{u} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & 1 & \\ -a_3 & b_3 & 1 \\ & -a_4 & b_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_1 & 1 & & \\ -a_2 & b_2 & 1 & \\ & -a_3 & b_3 & 1 \\ & & -a_4 & b_4 \end{vmatrix}$$

Wenn der Nenner durch R bezeichnet wird, so ist der Zähler $a_1 \frac{\partial R}{\partial b_1}$ (§. 3, 14), mithin der Näherungswerth $a_1 \frac{\partial \log R}{\partial b_1}$ *).

4. Bei besondrer Beschaffenheit der Coefficienten giebt es besondre Methoden zur Auflösung von Systemen linearer Gleichungen.

Wenn die Coefficienten des in (1) betrachteten Systems von der Art sind, dass

$$a_{ki} = -a_{ik}, \qquad a_{ii} = 0$$

---

*) Spottiswoode 1853 Crelle J. 51 p. 374. Bauer Münchener Acad. 1872. Vergl. §. 3, 11.

und wenn n gerade ist, so hat man nach den Sätzen und Bezeichnungen von §. 5, 8 die Auflösung*)

$$(-1)^k(1,2,..,n)x_k = u_1(2,..,k-1,k+1,..,n) + u_2(3,..,k-1,k+1,..,n,1)$$
$$+ .. + u_n(1,..,k-1,k+1,..,n-1)$$

Multiplicirt man nämlich die gegebenen Gleichungen der Reihe nach mit

$$(2,..,k-1,k+1,..,n), (3,..,k-1,k+1,..,n,1), .., (1,..,k-1,k+1,..,n-1)$$

und addirt die erhaltenen Gleichungen, so bekommt x_k den Coefficienten

$$a_{1k}(2,..,n) + a_{2k}(3,..,n,1) + .. + a_{nk}(1,..,n-1)$$

dessen Werth durch

$$-(k,1,..,k-1,k+1,..,n) = (-1)^k(1,2,..,n)$$

ausgedrückt wird. Dagegen hat x_i in der erhaltenen Summe den Coefficienten

$$-(i,1,..,k-1,k+1,..,n)$$

welcher identisch verschwindet.

5. Wenn die Coefficienten des linearen Systems von der Art sind, dass

$$a_{ik} = -a_{ki}, \qquad a_{ii} = 0$$

und n ungerade ist, so ist $R=0$ (§. 3, 5), und den gegebenen Gleichungen genügen im Allgemeinen nur unendliche Werthe von x_1, x_2, .., welche zu einander bestimmte Verhältnisse haben (2).

Wenn jedoch die Werthe u_1, u_2, .. der Bedingung

$$u_1\alpha_{1k} + u_2\alpha_{2k} + .. + u_n\alpha_{nk} = 0$$

genügen, so ist eine Gleichung des Systems überflüssig und das System der übrigen Gleichungen nach (4) auflösbar.

Vermöge der Identität (§. 5, 8)

$$\alpha_{ik} = (i+1,..,n,1,..,i-1)(k+1,..,n,1,..,k-1)$$

*) Jacobi Crelle J. 2 p. 356.

reducirt sich jene Bedingung auf

$$u_1(2,\ldots,n) + u_2(3,\ldots,n,1) + \ldots + u_n(1,\ldots,n-1) = 0\text{*)}$$

Beispiel. Dem System

$$\begin{array}{cccl} * & cy & -bz & = f \\ -cx & * & +az & = g \\ bx & -ay & * & = h \end{array}$$

genügen im Allgemeinen unendliche Werthe x, y, z, die sich zu einander wie $a : b : c$ verhalten, vorausgesetzt dass keine der Grössen a, b, c null ist. Wenn aber

$$af + bg + ch = 0$$

ist, so folgt aus 2 Gleichungen des Systems die dritte, das System ist unbestimmt.

Andre lineare Systeme von besonderer Art werden unten (§. 10) aufgelöst.

§. 9. Lehrsätze über die linearen Differentialgleichungen.

1. Wenn y_i eine gegebene Function von x, und $y_{ik} = \frac{d^k y_i}{dx^k}$, so ist die aus n Functionen $y_1, y_2, \ldots$ einer Variablen und ihren Fluxionen gebildete Determinante $n$ten Grades (§. 3, 15. III)

$$R = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\cdot & y_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ y_n & y_{n1} & \cdot\cdot & y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

entscheidend für die Unabhängigkeit der Functionen von einander, und erscheint als **Determinante der n Functionen von einer Variablen.** Wenn die Coefficienten b von x unabhängig sind, und wenn y_n durch $b_1 y_1 + \ldots + b_n y_n$ ersetzt wird, so erhält die Determinante den Werth $b_n R$ (§. 3, 7). Unter der Bedingung $b_1 y_1 + \ldots + b_n y_n = 0$ ist $R = 0$ bei allen x.

---

*) Jacobi l. c.

2. Umgekehrt: Wenn die Determinante der n Functionen null ist bei allen x, und wenn nach Weglassung von y_i die Determinante der übrigen $n-1$ Functionen nicht bei allen x null ist, so ist y_i eine lineare Form der übrigen Functionen mit unbestimmten Coefficienten, die von x nicht abhängen. Brioschi Determ. 1854 p. 82 und die oben §. 3, 15. III citirten Autoren.

Beweis. Wenn bei allen x

$$\det(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} \\ y_2 & y_{21} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{so ist} \quad \frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1} = 0$$

d. h. $y_2 : y_1$ von x unabhängig, $y_2 = b_1 y_1$, b_1 eine von x unabhängige Unbestimmte.

Ferner sei bei allen x

$$\det(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & y_{12} \\ y_2 & y_{21} & y_{22} \\ y_3 & y_{31} & y_{32} \end{vmatrix} = 0$$

Die Adjuncten der dritten Colonne sind

$$c_1 = \det(y_2, y_3) \qquad c_2 = \det(y_3, y_1) \qquad c_3 = \det(y_1, y_2)$$

Nach §. 3, 2 hat man

$$\begin{aligned} c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 &= 0 \\ c_1 y_{11} + c_2 y_{21} + c_3 y_{31} &= 0 \\ c_1 y_{12} + c_2 y_{22} + c_3 y_{32} &= 0 \end{aligned}$$

folglich durch Differentiation

$$\begin{aligned} c_{11} y_1 + c_{21} y_2 + c_{31} y_3 &= 0 \\ c_{11} y_{11} + c_{21} y_{21} + c_{31} y_{31} &= 0 \\ c_{11} y_{21} + c_{21} y_{22} + c_{31} y_{32} &= 0 \end{aligned}$$

Die Determinante des für c_1, c_2, c_3 linearen Systems ist null, adj $y_{32} = c_3$ sei nicht null: dann hat das System die Lösung (§. 8, 2)

$$c_1 : c_2 : c_3 = \operatorname{adj} y_{12} : \operatorname{adj} y_{22} : \operatorname{adj} y_{32}$$

Diese Lösung ist auch die Lösung des für c_{11}, c_{21}, c_{31} linearen Systems, folglich

$$c_{11} : c_{21} : c_{31} = c_1 : c_2 : c_3$$

$$\frac{d}{dx}\frac{c_1}{c_3} = 0, \qquad \frac{d}{dx}\frac{c_2}{c_3} = 0$$

d. h. $c_1 : c_3$, $c_2 : c_3$ sind von x unabhängige Unbestimmte $-b_1$, $-b_2$,

$$y_3 = b_1 y_1 + b_2 y_2$$

Ebenso bei mehr Functionen.

3. Wenn y eine Function von x, $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$, und a, a_0, a_1, .. von y, y', .. unabhängig, so ist

$$f = a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_n y^{(n)}$$

eine lineare Form der y, y', ... Wenn a_n und a nicht null sind, so ist $f = 0$ eine homogene lineare Differentialgleichung für y, und $f = a$ eine nicht homogene lineare Differentialgleichung. Die gegebene Function y_i von x, welche eine von x unabhängige Unbestimmte (willkürliche Constante, Parameter) nicht enthält, ist ein particuläres Integral der Gleichung $f = 0$, wenn $f = 0$ bei $y = y_i$ d. h.

$$a_0 y_i + a_1 y_{i1} + \ldots + a_n y_{in} = 0$$

Wenn y_1, y_2, .. particuläre Integrale der Gleichung $f = 0$ sind, und b_1, b_2, .. von x unabhängige Unbestimmte, so sind $b_1 y_1$, $b_1 y_1 + b_2 y_2$, .. Integrale der Gleichung $f = 0$ (1).

Wenn die Determinante R der particulären Integrale y_1, .., y_n nicht bei allen x null ist, so hat man (1)

$$\det(y_1, \ldots, y_n) f = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\;\cdot & y_{1,n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & 0 \\ y_n & y_{n1} & \cdot\;\cdot & y_{n,n-1} & 0 \\ y & y' & & y^{(n)} & f \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\;\cdot & y_{1,n-1} & y_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_{n1} & \cdot\;\cdot & y_{n,n-1} & y_{nn} \\ y & y' & \cdot\;\cdot & y^{(n-1)} & y^{(n)} \end{vmatrix} a_n = \det(y_1, \ldots, y_n, y) a_n$$

nach Transformation der Zusatz-Colonne. Bei $f = 0$ ist

$$\det(y_1, \ldots, y_n, y) = 0, \quad y = b_1 y_1 + \ldots + b_n y_n \quad (2)$$

d. h. das Integral $b_1 y_1 + \ldots + b_n y_n$ der $f = 0$ (das allgemeine, complete Integral) kann componirt werden aus n parti-

culären Integralen, deren Determinante nicht null ist, mit ebensoviel Unbestimmten, welche von x nicht abhängen.

Die Identität $Rf = a_n(y \operatorname{adj} y + y' \operatorname{adj} y' + \ldots)$ giebt

$$Ra_0 = a_n \operatorname{adj} y, \quad Ra_1 = a_n \operatorname{adj} y', \ldots, \quad Ra_{n-1} = a_n \operatorname{adj} y^{(n-1)}$$

Nun ist $-\operatorname{adj} y^{(n-1)} = \frac{dR}{dx}$ (§. 3, 15. III), folglich*)

$$\frac{dR}{R} = \frac{a_{n-1}}{-a_n} dx, \qquad R = e^{\int \frac{a_{n-1}}{-a_n} dx}$$

4. Aus dem Integral $y = b_1 y_1 + \ldots + b_n y_n$ der homogenen Gleichung $f = 0$ wird das Integral der nicht homogenen linearen Differentialgleichung $f = a$ durch die sogenannte variation des constantes arbitraires (Lagrange Mém. de Berlin 1775, Recherches etc. art. 1) gefunden, indem man die von x unabhängigen Unbestimmten durch Functionen von x ersetzt, welche durch je eine Quadratur bestimmt je eine von x unabhängige Unbestimmte enthalten.

Lagrange hatte 1764 Miscell. Taur. 3 p. 179 bemerkt, dass die Integration der $f = a$ auf die Integration einer nicht homogenen linearen Differentialgleichung $(n-m)$ter Ordnung reducirt werden kann, wenn m particuläre Integrale der $f = 0$ gegeben sind, deren Determinante nicht null. Die Reduction ist auch von D'Alembert (l. c. p. 381) in kurzen Umrissen ausgeführt worden, mit dessen Verfahren Libri's Abhandlung über diesen Gegenstand (Crelle J. 10 p. 185) zusammentrifft. Mit Hülfe der Determinanten hat Malmstèn (Crelle J. 39 p. 91) aus $n-1$ particulären Integralen der Gleichung $f = 0$ das letzte erforderliche particuläre Integral derselben Gleichung dargestellt. Die Reduction der Gleichung $f = a$, wenn m particuläre Integrale der $f = 0$ bekannt sind, wurde von Joachimsthal (Crelle J. 40 p. 48) auf analoge Weise ausgeführt. Das hierzu dienliche Verfahren ist zum grossen Theil bereits von Lagrange vorgezeichnet, der in einer spätern Abhandlung (Mém. de Berlin 1775 p. 190)

*) Abel Crelle J. 2 p. 22. Vergl. Malmstèn Crelle J. 39 p. 91 und Tissot Liouv. J. 17 p. 178.

das allgemeine Integral der Gleichung $f = a$ durch n particuläre Integrale der Gleichung $f = 0$ dargestellt hat.

Wenn $y_1, y_2, .., y_m$ gegebene particuläre Integrale der Gleichung $f = 0$ sind, deren Determinante nicht bei allen x null ist, so lassen sich ebensoviel Functionen von x, welche durch $b_1, b_2, .., b_m$ bezeichnet werden, nach Auflösung einer allgemeinen linearen Differentialgleichung $(n-m)$ter Ordnung durch m Quadraturen dergestalt bestimmen, dass

$$y = b_1 y_1 + b_2 y_2 + .. + b_m y_m$$

das Integral der Gleichung $f = a$ ist. In der obigen Bezeichnung erhält man

$$\begin{aligned}
y' &= b_1 y_{11} + .. + b_m y_{m1} \\
y'' &= b_1 y_{12} + .. + b_m y_{m2} \\
&\ldots \\
y^{(m-1)} &= b_1 y_{1,m-1} + .. + b_m y_{m,m-1}
\end{aligned}$$

unter den Bedingungen

$$\begin{aligned}
b_{11} y_1 + .. + b_{m1} y_m &= 0 \\
b_{11} y_{11} + .. + b_{m1} y_{m1} &= 0 \\
&\ldots \\
b_{11} y_{1,m-2} + .. + b_{m1} y_{m,m-2} &= 0
\end{aligned}$$

Ebenso ist

$$y^{(m)} = b_1 y_{1m} + .. + b_m y_{mm} + z$$

wenn

$$b_{11} y_{1,m-1} + .. + b_{m1} y_{m,m-1} = z$$

$$y^{(m+1)} = b_1 y_{1,m+1} + .. + b_m y_{m,m+1} + z' + z_1$$

wenn

$$b_{11} y_{1m} + .. + b_{m1} y_{mm} = z_1, \quad \frac{dz}{dx} = z'$$

$$y^{(m+2)} = b_1 y_{1,m+2} + .. + b_m y_{m,m+2} + z'' + z_{11} + z_2$$

wenn

$$b_{11} y_{1,m+1} + .. + b_{m1} y_{m,m+1} = z_2, \quad \frac{dz_1}{dx} = z_{11}$$

$$\begin{aligned}
y^{(n)} = b_1 y_{1n} + .. + b_m y_{mn} &+ z^{(n-m)} \\
&+ z_{1,n-m-1} + .. + z_{n-m-1,1} + z_{n-m}
\end{aligned}$$

wenn

$$b_{11}\, y_{1,n-1} + \ldots + b_{m1}\, y_{m,n-1} = z_{n-m}$$

Indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit $a_0, a_1, \ldots$ componirt, findet man vermöge der über $y_1, y_2, \ldots, y_m$ gemachten Voraussetzungen

$$\begin{aligned} a = a_m z + a_{m+1} z' + a_{m+2} z'' + \ldots + a_n z^{(n-m)} \\ + a_{m+1} z_1 + a_{m+2} z_{11} + \ldots + a_n z_{1,n-m-1} \\ + a_{m+2} z_2 + \ldots + a_n z_{2,n-m-2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + a_n z_{n-m} \end{aligned}$$

als Bedingung, unter welcher $b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$ ein Integral der Gleichung (I) ist.

Zur Berechnung der Grössen $b_1, \ldots, b_m, z_1, z_2, \ldots$ bilde man die Determinante $m$ten Grades

$$R_\mu = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\cdot & y_{1,m-2} & y_{1\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ y_m & y_{m1} & \cdot\cdot & y_{m,m-2} & y_{m\mu} \end{vmatrix}$$

und die Adjuncten $\eta_1, \ldots, \eta_m$ der letzten Colonne. Wenn man die $i$te Zeile mit b_{i1} multiplicirt und zu ihr die übrigen der Reihe nach mit $b_{11}, b_{21}, \ldots$ multiplicirten Zeilen addirt, so verschwinden ihre Elemente mit Ausnahme des letzten, welches für $\mu = m-1, m, m+1, \ldots$ die Werthe $z, z_1, z_2, \ldots$ annimmt. Also ist

$$b_{i1} R_{m-1} = \eta_i z, \quad b_{i1} R_m = \eta_i z_1, \quad b_{i1} R_{m+1} = \eta_1 z_2, \ldots$$

$$z_1 = \frac{R_m z}{R_{m-1}} = c_1 z, \quad z_2 = \frac{R_{m+1} z}{R_{m-1}} = c_2 z, \ldots$$

Durch Differentiation findet man

$$\begin{aligned} z_{i1} &= c_{i1} z + c_i z' \\ z_{i2} &= c_{i2} z + 2\, c_{i1} z' + c_i z'' \\ z_{i3} &= c_{i3} z + 3\, c_{i2} z' + 3\, c_{i1} z'' + c_i z''' \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{array}{rl}
a = & a_m z \\
+ a_{m+1} & (c_1 z + z') \\
+ a_{m+2} & \left| \begin{array}{l} c_{11} z + c_1 z' + z'' \\ + c_2 z \end{array} \right. \\
+ a_{m+3} & \left| \begin{array}{l} c_{12} z + 2 c_{11} z' + c_1 z'' + z''' \\ + c_{21} z + c_2 z' \\ + c_3 z \end{array} \right. \\
+ a_{m+4} & \left| \begin{array}{l} c_{13} z + 3 c_{12} z' + 3 c_{11} z'' + c_1 z^{(3)} + z^{(4)} \\ + c_{22} z + 2 c_{21} z' + c_2 z'' \\ + c_{31} z + c_3 z' \\ + c_4 z \end{array} \right. \\
+ & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

die lineare Gleichung $(m-n)$ter Ordnung, welcher die Function z zu genügen hat. Aus dem Integral z findet man endlich

$$b_{i1} R_{m-1} = \eta_i z \qquad b_i = \int \frac{\eta_i z}{R_{m-1}} dx$$

Das Integral z enthält $n-m$ von x unabhängige Unbestimmte, und jede Quadratur bringt eine dergleichen: also ist vermöge der erforderlichen Unbestimmtheit $b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m$ das Integral der $f = a$.

5. Die lineare Differentialgleichung, welche zur Integration der gegebenen Differentialgleichung zu lösen übrig bleibt, ist im Allgemeinen nicht lösbar, wenn sie die erste Ordnung übersteigt. Also kommen besonders die Fälle $m = n$ und $m = n-1$ in Betracht.

Für $m = n$ ist $a = a_n z$,

$$R_{n-1} = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\cdot & y_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ y_n & y_{n1} & \cdot\cdot & y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

η_i die Adjuncte von $y_{i,n-1}$ und

$$b_{i1} R_{n-1} = \eta_i z, \qquad b_i = \int \frac{a \eta_i}{a_n R_{n-1}} dx$$

folglich

$$y = y_1 \int \frac{a\,\eta_1}{a_n R_{n-1}}\,dx + \ldots + y_n \int \frac{a\,\eta_n}{a_n R_{n-1}}\,dx$$

das Integral der $f = a$, wie LAGRANGE a. a. O. bemerkt hat.

Für $m = n-1$ ist $a = a_{n-1} z + a_n (c_1 z + z')$ und η_i der Coefficient von $y_{i\mu}$ in

$$R_\mu = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & & y_{1,n-3} & y_{1\mu} \\ . & . & \ldots & . & . \\ y_{n-1} & y_{n-1,1} & \ldots & y_{n-1,n-3} & y_{n-1,\mu} \end{vmatrix}$$

η_i die Adjuncte von $y_{i\mu}$ und

$$c_1 = \frac{R_{n-1}}{R_{n-2}}$$

Nun ist $dR_{n-1} = R_{n-2}\,dx$ (§. 3, 15), folglich

$$aR_{n-2} = a_{n-1} R_{n-2} z + a_n (R_{n-1} z + R_{n-2} z') = a_{n-1} R_{n-2} z + a_n (R_{n-2} z)'$$

Zur Auflösung dieser Gleichung bedarf man eines particulären Integrals u_1 der Gleichung $0 = a_{n-1} u + a_n u'$, nämlich

$$u_1 = e^{\int \frac{a_{n-1}}{-a_n}\,dx}$$

Setzt man nun das zunächst gesuchte allgemeine Integral

$$R_{n-2} z = u_1 v_1$$

folglich nach der angenommenen Bezeichnung

$$(R_{n-2} z)' = u_{11} v_1 + u_1 v_{11}$$

so erhält man, weil $a_{n-1} u_1 + a_n u_{11}$ nach der Voraussetzung null ist,

$$a R_{n-2} = a_n u_1 v_{11}, \qquad v_1 = \int \frac{a R_{n-2}}{a_n u_1}\,dx$$

mit einer unbestimmten Constante. Zur Bestimmung von b_i hat man endlich

$$b_{i1} = \frac{\eta_i z}{R_{n-2}} = \frac{u_1 v_1}{R_{n-2}^2}\,\eta_i$$

$$b_i = \int \frac{u_1 v_1}{R_{n-2}^2}\,\eta_i\,dx$$

mit je einer neuen unbestimmten Constante, so dass

$$y = b_1 y_1 + \ldots + b_{n-1} y_{n-1}$$

das Integral der Gleichung $f = a$ ist, wie JOACHIMSTHAL (l. c.) bemerkt hat. Den besondern Fall $a = 0$, in welchem v_1 selbst zur unbestimmten Constante wird, hatte MALMSTÈN (l. c.) früher analog behandelt.

§. 10. Product der Differenzen gegebener Grössen.

1. Wenn man in der Reihe der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jede von allen folgenden subtrahirt, so erhält man $\frac{1}{2}n(n-1)$ Differenzen, deren Product

$$\begin{array}{rrl} (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1) & \ldots & (\alpha_n-\alpha_1) \\ (\alpha_3-\alpha_2) & \ldots & (\alpha_n-\alpha_2) \\ & \ldots & \ldots \\ & & (\alpha_n-\alpha_{n-1}) \end{array}$$

durch $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ bezeichnet wird. Dieses Product reducirt sich auf eine Determinante $n$ten Grades, deren Zeilen geometrische Progressionen enthalten, nämlich*)

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Beweis. Das Product Δ ist alternirend (§. 1, 4). Wenn nun $\alpha_1^a \alpha_2^b \alpha_3^c \ldots$ ein Glied von Δ ist, so ist $\alpha_2^a \alpha_1^b \alpha_3^c \ldots$ ein Glied von $-\Delta$, folglich $-\alpha_2^a \alpha_1^b \alpha_3^c \ldots$ ein Glied von Δ. Diese beiden Glieder von Δ sind entgegengesetzt gleich, wenn die Exponenten a und b einander gleich sind. Also braucht man, um alle Glieder des Products zu bilden, für die Exponenten $a, b, c, \ldots$

---

*) CAUCHY J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 48. Analyse algébr. III, 2 und Note IV. JACOBI Crelle J. 22 p. 360. Das Product der Differenzen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung war von WARING, LAGRANGE, VANDERMONDE betrachtet worden. Bei dem letztern findet man nur den besondern Fall des obigen Satzes

$$(b-a)(c-a)(c-b) = ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a$$

Hist. de l'Acad. de Paris 1771 p. 369.

nur verschiedene Zahlen zu setzen, und zwar Zahlen der Reihe 0, 1, .., $n-1$, weil kein Exponent den Werth n erreichen kann. Die Glieder, welche aus

$$\alpha_1{}^0\,\alpha_2{}^1\,\alpha_3{}^2\;..\;\alpha_n{}^{n-1}$$

durch gegenseitige Vertauschung der Exponenten entspringen, lassen sich auch durch gegenseitige Vertauschung der Dignanden ableiten, und sind Glieder von Δ oder von $-\Delta$, je nachdem sie durch Permutationen der einen oder der andern Classe entstanden. Also ist das Product Δ von der Determinante

$$\Sigma \pm \alpha_1{}^0\,\alpha_2{}^1\;..\;\alpha_n{}^{n-1}$$

nicht verschieden (§. 2, 2).

Von allen $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ Gliedern des Products bleiben nur $n!$ übrig, also

bei	3	Grössen	6	statt	8
»	4	»	24	»	64
»	5	»	120	»	1024 u. s. w.

Beispiele.

$$(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1{}^2 & \alpha_1\beta_1 & \beta_1{}^2 \\ \alpha_2{}^2 & \alpha_2\beta_2 & \beta_2{}^2 \\ \alpha_3{}^2 & \alpha_3\beta_3 & \beta_3{}^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\alpha_1,..,\alpha_n)(x-\alpha_1)..(x-\alpha_n) = \Delta(\alpha_1,..,\alpha_n,x)$$

2. Jede ganze alternirende Function der Variablen $\alpha_1, \alpha_2, ..,$ α_n ist durch das Product der Differenzen $\Delta(\alpha_1,..,\alpha_n)$ theilbar*). Denn durch die gegenseitige Vertauschung von irgend zwei Variablen erhält die Function den entgegengesetzt gleichen Werth; daher verschwindet sie, wenn die beiden Variablen von einander sich nicht unterscheiden (§. 2, 4); also ist sie durch die Differenz derselben, mithin durch das Product Δ theilbar.

Der Quotient der ganzen alternirenden Function durch das Product der Differenzen ihrer Variablen ist je nach der Anzahl der Dimensionen entweder eine von den Variablen unabhängige Zahl, oder eine (permanent) symmetrische Function der Variablen.

*) Cauchy l. c. p. 46.

Z. B. die Determinante (1) $\Sigma \pm \alpha_1{}^0 \alpha_2{}^1 \ldots \alpha_n{}^{n-1}$ ist eine ganze alternirende Function von ebensoviel Dimensionen als das Product Δ. Der Quotient der Determinante durch das Product ist 1, weil das Anfangsglied der Determinante mit dem Anfangsglied des Products auch dem Zeichen nach übereinstimmt. In der That ist (§. 3, 6)

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & . \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & . \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & . \\ 0 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_2^2-\alpha_1^2 & . \\ 0 & \alpha_3-\alpha_1 & \alpha_3^2-\alpha_1^2 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\ldots \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2 & . \\ 1 & \alpha_1+\alpha_3 & \alpha_1^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\ldots \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & . \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

u. s. w. Andre Beispiele solcher Quotienten kommen im Folgenden vor. Die allgemeine Berechnung derselben ist von Jacobi Crelle J. 22 p. 365 gezeigt worden.

3. I. Wenn $\varphi_i(x)$ eine ganze Function $i$ten Grades von x ist, in der die höchste Potenz den Coefficienten 1 hat, so findet man*)

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(\alpha_1) & \ldots & \varphi_{n-1}(\alpha_1) \\ . & . & \ldots & . \\ 1 & \varphi_1(\alpha_n) & \ldots & \varphi_{n-1}(\alpha_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ . & . & \ldots & . \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Delta$$

indem man zur letzten, vorletzten, .. Colonne in Δ die mit den erforderlichen Coefficienten multiplicirten voranstehenden Colonnen addirt (§. 3, 7). Wenn die höchsten Potenzen von x andre Coefficienten haben, so ist die Determinante Δ mit dem Product dieser Coefficienten zu multipliciren. Wenn z. B.

$$\varphi_i(x) = \binom{x}{i} = \frac{x(x-1)\ldots(x-i+1)}{1.2 \ldots i}$$

---

*) Borchardt über eine Interpolationsformel. Abhandl. der Berl. Acad. 1860 p. 4.

so findet man

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{\alpha_1}{1} & \cdot\,\cdot & \binom{\alpha_1}{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ 1 & \binom{\alpha_n}{\alpha} & \cdot\,\cdot & \binom{\alpha_n}{n-1} \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{2^{n-2}\,.\,3^{n-3}\,..\,(n-1)}\,.$$

Und wenn $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha + 1, \ldots, \alpha_n = \alpha + n - 1$, so ist

$$\Delta = 2^{n-2}\,.\,3^{n-3}\,..\,(n-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{\alpha}{1} & \cdot\,\cdot & \binom{\alpha}{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ 1 & \binom{\alpha+n-1}{1} & \cdot\,\cdot & \binom{\alpha+n-1}{n-1} \end{vmatrix} = 1\,{}^{*)}$$

II. Wenn $\varphi_i(x) = a_{0i} + a_{1i}x + \ldots + a_{n-1,i}x^{n-1}$ ist, so hat man

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(\alpha_1) & \cdot\,\cdot & \varphi_{n-1}(\alpha_1) \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \varphi_0(\alpha_n) & \cdot\,\cdot & \varphi_{n-1}(\alpha_n) \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{00}\,..\,a_{n-1,n-1}\,\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

nach der Multiplicationsregel (§. 6, 1).

Dem angegebenen Lehrsatz steht ein allgemeinerer zur Seite. Wenn

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \varphi_0(x) + \varphi_1(x)y + \ldots + \varphi_{n-1}(x)y^{n-1} \\ &= \Sigma a_{ik}\, x^i y^k \end{aligned}$$

eine Summe, deren Glieder gebildet werden, indem man für i und k alle Zahlen von 0 bis $n-1$ setzt, so erhält man bei nochmaliger Anwendung der Multiplicationsregel**)

$$\Sigma \pm F(\alpha_1, \beta_1)\,..\,F(\alpha_n, \beta_n) = \Sigma \pm a_{00}\,..\,a_{n-1,n-1}\,\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,\Delta(\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

4. Wenn man das Product aller Differenzen der Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit dem Product aller Differenzen der Grössen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ multiplicirt, so erhält man eine Determinante $n$ten Grades. Nach der Multiplicationsregel (§. 6, 4) ist

---

*) Vergl. §. 3, 10. STERN Crelle J. 66 p. 285.

**) BORCHARDT Berl. Monatsbericht 1859 p. 378 und Crelle J. 57 p. 112.

$$\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)\,\Delta(\beta_1, .., \beta_n)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & .. & \alpha_1^{n-1} \\ . & . & ... & . \\ 1 & \alpha_n & .. & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & .. & \beta_1^{n-1} \\ . & . & ... & . \\ 1 & \beta_n & .. & \beta_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & .. & c_{1n} \\ . & ... & . \\ c_{n1} & .. & c_{nn} \end{vmatrix}$$

wenn

$$c_{ik} = 1 + \alpha_i\beta_k + \alpha_i^2\beta_k^2 + .. + \alpha_i^{n-1}\beta_k^{n-1} = \frac{1-\alpha_i^n\beta_k^n}{1-\alpha_i\beta_k} \text{*)}$$

oder wenn

$$c_{ik} = \alpha_1^{i-1}\beta_1^{k-1} + \alpha_2^{i-1}\beta_2^{k-1} + .. + \alpha_n^{i-1}\beta_n^{k-1}$$

Insbesondere ist

$$\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & .. & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & .. & s_n \\ . & . & ... & . \\ s_{n-1} & s_n & .. & s_{2n-2} \end{vmatrix} = S_n$$

wenn

$$s_i = \alpha_1^i + \alpha_2^i + .. + \alpha_n^i$$

Denn in diesem Falle reducirt sich das Element c_{ik} der zu bildenden Determinante auf die Summe der $(i+k-2)$ten Potenzen der Grössen $\alpha_1, .., \alpha_n$.

Allgemeiner hat man**)

$$\Sigma[\Delta(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m)^2] = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & .. & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & .. & s_m \\ . & . & ... & . \\ s_{m-1} & s_m & .. & s_{2m-2} \end{vmatrix} = S_m$$

wenn die Summe die sämmtlichen $\binom{n}{m}$ Glieder umfasst, welche aus dem Anfangsglied $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m)^2$ dadurch entspringen, dass an die Stelle der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m$ je m verschiedene aus der Reihe $\alpha_1, .., \alpha_n$ gesetzt werden. Denn unter der Voraussetzung

$$c_{ik} = s_{i+k-2} = \alpha_1^{i-1}\alpha_1^{k-1} + \alpha_2^{i-1}\alpha_2^{k-1} + .. + \alpha_n^{i-1}\alpha_n^{k-1}$$

ist die durch S_m bezeichnete Determinante in eine Summe von Quadraten zerlegbar (§. 6, 3), nämlich

*) Cauchy Exerc. d' anal. 2 p. 169.

**) Cayley Liouv. J. 11 p. 298 und Borchardt Liouv. J. 12 p. 58.

$$S_m = \begin{vmatrix} c_{11} & . & . & c_{1m} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & . & . & c_{mm} \end{vmatrix} = \Sigma\left\{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & . & . & \alpha_1^{m-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & \alpha_m & . & . & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}^2\right\}$$

wobei das Summenzeichen die angegebene Bedeutung hat.

5. Ebenso wird die umfassendere Summe

$$\Sigma\left\{\chi(\alpha_1)\chi(\alpha_2)\,..\,\chi(\alpha_m)\Delta(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m)^2\right\}$$

durch die Determinante $m$ten Grades

$$T = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & . & . & t_{m-1} \\ t_1 & t_2 & . & . & t_m \\ . & . & . & . & . \\ t_{m-1} & t_m & . & . & t_{2m-2} \end{vmatrix}$$

ausgedrückt*), wenn $\chi(\alpha_i)$ gegeben ist, und

$$t_\mu = \alpha_1^\mu \chi(\alpha_1) + \,..\, + \alpha_n^\mu \chi(\alpha_n)$$

Setzt man insbesondere

$$\text{(I)} \qquad \chi(\alpha_i) = b_i(x - \alpha_i)$$

$$u_\mu = b_1\,\alpha_1^\mu + \,..\, + b_n\,\alpha_n^\mu$$

so wird $t_\mu = u_\mu x - u_{\mu+1}$, und die Determinante T lässt sich in eine Determinante $(m+1)$ten Grades transformiren, wie folgt**).

Nachdem man jede Colonne mit -1 multiplicirt hat, findet man (§. 3, 3)

$$T = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & . & . & 1 \\ u_1 - u_0 x & u_2 - u_1 x & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ u_m - u_{m-1}x & u_{m+1} - u_m x & . & . & 0 \end{vmatrix}$$

Addirt man zur zweiten Zeile die mit x multiplicirte erste Zeile, so behält man in der zweiten Zeile

$$u_1 \quad u_2 \quad . \quad . \quad u_m \quad x$$

Wenn man diese mit x multiplicirt und zur dritten Zeile addirt, so behält man in der dritten Zeile

$$u_2 \quad u_3 \quad . \quad . \quad u_{m+1} \quad x^2$$

u. s. w. Daher ist unter der Voraussetzung (I)

---

*) Joachimsthal Crelle J. 48 p. 394 und Borchardt über eine Interpolationsformel p. 8.

**) Vergl. Jacobi Crelle J. 30 p. 129.

$$T = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & . . & u_{m-1} & 1 \\ u_1 & u_2 & . . & u_m & x \\ . & . & . . . & . & . \\ u_m & u_{m+1} & . . & u_{2m-1} & x^m \end{vmatrix}.$$

Setzt man ferner

$$\text{(II)} \qquad \chi(\alpha_i) = b_i(x-\alpha_i)(y-\alpha_i)$$

so wird

$$t_\mu = u_{\mu+2} - u_{\mu+1}x - (u_{\mu+1} - u_\mu x)y$$

und die Determinante T kann in eine Determinante $(m+2)$ten Grades transformirt werden. Man hat nämlich wie vorhin

$$T = \begin{vmatrix} 1 & u_1 - u_0 x & u_2 - u_1 x & . . \\ 0 & u_2 - u_1 x - (u_1 - u_0 x)y & u_3 - u_2 x - (u_2 - u_1 x)y & . . \\ 0 & u_3 - u_2 x - (u_2 - u_1 x)y & u_4 - u_3 x - (u_3 - u_2 x)y & . . \\ . & . . . & . . . & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & u_1 - u_0 x & . . & u_m - u_{m-1} x \\ y & u_2 - u_1 x & . . & u_{m+1} - u_m x \\ . & . & . . & . \\ y^m & u_{m+1} - u_m x & . . & u_{2m} - u_{2m-1} x \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & . . \\ 1 & u_0 & u_1 - u_0 x & . . \\ y & u_1 & u_2' - u_1 x & . . \\ . & . & . . & . . \\ . & . & . . & \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & . . & x^m \\ 1 & u_0 & u_1 & . . & u_m \\ y & u_1 & u_2 & . . & u_{m+1} \\ . & . & . & . . & . \\ y^m & u_m & u_{m+1} & . . & u_{2m} \end{vmatrix}$$

6. Unter der Voraussetzung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + . . + a_0$$
$$= a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) . . (x-\alpha_n)$$

kann die Determinante $m$ten Grades (4)

$$S_m = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . . & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & . . & s_m \\ . & . & . . & . \\ s_{m-1} & s_m & . . & s_{2m-2} \end{vmatrix} = \Sigma\left\{\Delta(\alpha_1, . ., \alpha_m)^2\right\}$$

durch die Coefficienten von $f(x)$ ausgedrückt werden. Man bilde aus den $m-2$ Zeilen

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

und aus den m folgenden Zeilen

$$\begin{matrix} 0 & 0 & . & . & 0 & s_0 & s_1 & . & . & s_{m-1} \\ 0 & 0 & . & . & s_0 & s_1 & . & . & . & s_m \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ s_0 & s_1 & . & . & . & . & . & . & . & s_{2m-3} \\ s_1 & s_2 & . & . & . & . & . & . & . & s_{2m-2} \end{matrix}$$

ein System von $(2m-2)^2$ Elementen, dessen Determinante von S_m nicht verschieden ist (§. 3, 3). Die Colonnen dieses Systems werden transformirt, die erste, indem man sie mit a_n multiplicirt; die zweite, indem man sie mit a_n multiplicirt und zu ihr die mit a_{n-1} multiplicirte erste Colonne addirt; die dritte, indem man sie mit a_n multiplicirt und zu ihr die mit a_{n-1}, a_{n-2} multiplicirte 2te, 1te Colonne addirt; u. s. f. Dadurch entsteht das System der $m-2$ Zeilen

$$\begin{matrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & . & . & . \\ 0 & a_n & a_{n-1} & . & . & . \\ 0 & 0 & a_n & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

und der $m-1$ folgenden Zeilen, die mit $m-2$, $m-3$, .. Nullen anfangen,

$$\begin{matrix} 0 & . & . & 0 & a_n s_0 & a_n s_1 + a_{n-1} s_0 & . & . \\ 0 & . & . & a_n s_0 & a_n s_1 + a_{n-1} s_0 & a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + a_{n-2} s_0 & . & . \\ . & . & . & . & . \; . & . \; . & . & . \end{matrix}$$

und der Schlusszeile

$$a_n s_1 \quad a_n s_2 + a_{n-1} s_1 \quad a_n s_3 + a_{n-1} s_2 + a_{n-2} s_1 \quad . \; . \; .$$

Die Determinante dieses Systems hat den Werth $a_n^{2m-2} S_m$ (§. 3, 4. u. 7), und die Elemente können mit Hülfe der Newton'schen Identitäten*)

---

*) Newton Arithm. univers. ed. 's Gravesande p. 192. Man leitet dieselben am einfachsten aus der Identität der beiden für $\frac{f'(x)}{f(x)}$ sich darbietenden Ausdrücke ab.

$$
\begin{aligned}
a_n s_0 &= n a_n \\
a_n s_1 + a_{n-1} s_0 &= (n-1\;\, a_{n-1} \\
a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + a_{n-2} s_0 &= (n-2) a_{n-2} \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots & \quad \ldots
\end{aligned}
$$

reducirt werden. Für die Schlusszeile hat man, weil $s_0 = n$ ist,

$$
\begin{aligned}
a_n s_1 &= -a_{n-1} \\
a_n s_2 + a_{n-1} s_1 &= -2 a_{n-2} \\
\ldots \quad \ldots & \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Demnach findet man

$$
-a_n^{2m-2} S_m = \begin{vmatrix}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdot\,\cdot \\
0 & a_n & a_{n-1} & \cdot\,\cdot \\
0 & 0 & a_n & \cdot\,\cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot \\
0 & n a_n & (n-1) a_{n-1} & \cdot\,\cdot \\
n a_n & (n-1) a_{n-1} & (n-2) a_{n-2} & \cdot\,\cdot \\
a_{n-1} & 2 a_{n-2} & 3 a_{n-3} & \cdot\,\cdot
\end{vmatrix}
$$

eine Determinante $(2m-2)$ten Grades, bei welcher die $m-2$ ersten und die $m-1$ folgenden Zeilen in Bezug auf die nicht verschwindenden Elemente übereinstimmen. Insbesondere ist

$$
-a_n^2 S_2 = \begin{vmatrix}
n a_n & (n-1) a_{n-1} \\
a_{n-1} & 2 a_{n-2}
\end{vmatrix}
$$

$$
-a_n^4 S_3 = \begin{vmatrix}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \\
0 & n a_n & (n-1) a_{n-1} & (n-2) a_{n-2} \\
n a_n & (n-1) a_{n-1} & (n-2) a_{n-2} & (n-3) a_{n-3} \\
a_{n-1} & 2 a_{n-2} & 3 a_{n-3} & 4 a_{n-4}
\end{vmatrix} \quad \text{u s. w.}
$$

7. Das Quadrat des Products von allen Differenzen der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ (4)

$$
S_n = \Delta(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)^2
$$

kann durch Werthe des Differentialquotienten der Function

$$
f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \,..\, (x-\alpha_n)
$$

ausgedrückt werden. Man hat nämlich

$$\begin{array}{llll} f'(\alpha_1) = & a_n & (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3) & \dots (\alpha_1-\alpha_n) \\ f'(\alpha_2) = & (\alpha_2-\alpha_1) & a_n \quad (\alpha_2-\alpha_3) & \dots (\alpha_2-\alpha_n) \\ f'(\alpha_3) = & (\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2) & a_n & \dots (\alpha_3-\alpha_n) \\ \dots & \dots & & \dots \end{array}$$

folglich*)

$$f'(\alpha_1)\dots f'(\alpha_n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_n^n \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^2$$

Ebendaher findet man für $m < n$

$$f'(\alpha_1)\dots f'(\alpha_m) = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} a_n^m \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_m)^2 P$$

wenn P das Product aller Differenzen der Grössen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ von den Grössen (Subtrahenden) $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$ bedeutet.

Beispiel. Wenn $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die $n$ten Wurzeln von 1 sind, so ist

$$f(x) = x^n - 1, \quad f'(x) = nx^{n-1}, \quad \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n = (-1)^{n-1}$$

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^2 = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} n^n$$

Und wenn $\alpha_n = 1$, so hat man

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})^2 = \frac{\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^2}{f'(\alpha_n)^2} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} n^{n-2}$$

8. In der Determinante $n$ten Grades

$$P = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-2} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-2} & u_n \end{vmatrix}$$

hat das Element u_i die Adjuncte

$$(-1)^{n-i} \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$$

wie sich ergiebt, indem man die $i$te Zeile zur Schlusszeile macht (§. 2, 3). Nach der angegebenen Bezeichnung ist

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = \frac{\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{(\alpha_i-\alpha_1)\dots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_{i+1}-\alpha_i)(\alpha_n-\alpha_i)}$$

Bildet man nun

$$f(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)$$
$$f'(\alpha_i) = (\alpha_i-\alpha_1)\dots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\dots(\alpha_i-\alpha_n)$$

---

*) Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 485.

so findet man

$$(-1)^{n-i} \Delta(\alpha_1, .., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, .., \alpha_n) = \frac{\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)}{f'(\alpha_i)}$$

und daher folgende Entwickelung der gegebenen Determinante

$$P = \left(\frac{u_1}{f'(\alpha_1)} + .. + \frac{u_n}{f'(\alpha_n)}\right) \Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)$$

9. Bezeichnet man durch P_r die Determinante, in welche P (8) übergeht, wenn α_i^r an die Stelle von u_i tritt, so ist für beliebige r *)

$$\frac{\alpha_1^r}{f'(\alpha_1)} + .. + \frac{\alpha_n^r}{f'(\alpha_n)} = \frac{P_r}{\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)}$$

Die Determinante P_r ist null, wenn die letzte Colonne mit einer der übrigen Colonnen übereinstimmt. Also verschwindet die Summe der Quotienten für $r = 0, 1, .., n-2$.

Die Determinante P_r geht in das Product Δ über, wenn $r = n-1$. Also hat für $r = n-1$ die Summe den Werth 1.

Die Determinante P_r ist für $r = n-1, n, n+1, ..$ eine ganze alternirende Function von $\alpha_1, .., \alpha_n$, mithin durch das Product Δ theilbar (2). Also ist für ganze $r > n-1$ die betrachtete Summe eine symmetrische ganze Function Q_r der Grössen $\alpha_1, .., \alpha_n$ von $r-n+1$ Dimensionen.

Wenn nun $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ..$ ist, so findet man aus

$$\begin{aligned} & a_0\left(\frac{1}{f'(\alpha_1)} + \frac{1}{f'(\alpha_2)} + .. + \frac{1}{f'(\alpha_n)}\right) \\ + & a_1\left(\frac{\alpha_1}{f'(\alpha_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\alpha_2)} + .. + \frac{\alpha_n}{f'(\alpha_n)}\right) \\ + & a_2\left(\frac{\alpha_1^2}{f'(\alpha_1)} + \frac{\alpha_2^2}{f'(\alpha_2)} + .. + \frac{\alpha_n^2}{f'(\alpha_n)}\right) \\ + & \quad \dots \qquad \dots \qquad \dots \end{aligned}$$

durch Addition der Colonnen die Summe

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} + .. + \frac{\varphi(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$$

---

*) Cauchy l. c. p. 497.

und durch Addition der Zeilen den Werth dieser Summe, der null ist, wenn $\varphi(x)$ $(n-2)$ten oder niedern Grades, der aber

$$a_n + a_{n+1} Q_{n+1} + \ldots$$

beträgt, wenn $\varphi(x)$ höhern Grades ist*).

Nach dem von Euler (Calc. diff. II, 407) formulirten Fundamentalsatz über die gebrochenen Functionen ist

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1 : f'(\alpha_1)}{z-\alpha_1} + \ldots + \frac{1 : f'(\alpha_n)}{z-\alpha_n}$$

Nun ist

$$\frac{1}{z-\alpha} = \frac{1}{z} \Sigma \left(\frac{\alpha}{z}\right)^h \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots)$$

Also ergiebt sich in der Entwickelung der identischen Ausdrücke nach fallenden Potenzen von z als Coefficient von z^{-r-1} einerseits

$$\frac{\alpha_1^r}{f'(\alpha_1)} + \ldots + \frac{\alpha_n^r}{f'(\alpha_n)} \text{ d. i. } Q_r$$

andrerseits (Euler Introd. I, 270)

$$\Sigma \alpha_1^h \alpha_2^i \ldots \qquad \left(\begin{matrix} h, i, \ldots = 0, 1, 2, \ldots \\ h+i+\ldots = r+1-n \end{matrix}\right)$$

so dass die Summe der Producte von je $r+1-n$ gleichen oder ungleichen Factoren der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ den Werth Q_r ausdrückt**).

10. Durch Entwickelung der Determinante (1)

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der $i$ten Zeile erhält man

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \delta_{i1} + \delta_{i2}\alpha_i + \ldots + \delta_{in}\alpha_i^{n-1}$$

---

*) Den ersten Theil dieses Satzes hatte Euler Calc. integr. II §. 1169 gegeben. Zwei allgemeinere Sätze hat Brioschi Crelle J. 50 p. 239 hinzugefügt. Der Satz wurde von Jacobi Crelle J. 14 p. 281 auf Functionen von 2 Variablen ausgedehnt. Die Werthe P_r und Q_r für negative ganze r, sowie die Determinante eines Systems, dessen Zeilen Potenzen der α mit beliebig gegebenen ganzen Exponenten enthalten, sind von Naegelsbach Programm Zweibrücken 1871 untersucht worden.

**) Jacobi Disq. de fract. simpl. 1825 p. 5.

Denselben Werth hat (8)

$$(-1)^{n-i} f'(\alpha_i)\, \Delta(\alpha_1, .., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, .., \alpha_n)$$

Nun ist

$$f'(\alpha_i) = \alpha_i^{n-1} + C_{i1}\, \alpha_i^{n-2} + C_{i2}\, \alpha_i^{n-3} + ..$$

wenn man durch C_{ik} die mit dem Zeichen $(-1)^k$ versehene Summe der Producte von k verschiedenen Grössen der Reihe $\alpha_1, .., \alpha_{i-1}$, $\alpha_{i+1}, .., \alpha_n$ bezeichnet. Daher hat man die Identität

$$\delta_{ik} = (-1)^{n-i} C_{i,n-k}\, \Delta(\alpha_1, .., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, .., \alpha_n)$$

$$\frac{\delta_{ik}}{\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)} = \frac{C_{i,n-k}}{f'(\alpha_i)}$$

11. Aus dem linearen System

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2\alpha_1 + .. + x_n\alpha_1^{n-1} = u_1 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_1 + x_2\alpha_n + .. + x_n\alpha_n^{n-1} = u_n \end{array}$$

findet man nach §. 8, 1

$$x_k \Delta(\alpha_1, .., \alpha_n) = u_1\, \delta_{1k} + .. + u_n\, \delta_{nk}$$

mithin (10)

$$x_k = \frac{u_1}{f'(\alpha_1)} C_{1,n-k} + .. + \frac{u_n}{f'(\alpha_n)} C_{n,n-k}$$

Wenn man zu dem gegebenen System die Gleichung

$$x_1 + x_2 z + .. + x_n z^{n-1} = \varphi(z)$$

hinzufügt, so erhält man (§. 8, 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & .. & \alpha_1^{n-1} & u_1 \\ . & . & . & .. & . & . \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & .. & \alpha_n^{n-1} & u_n \\ 1 & z & z^2 & .. & z^{n-1} & \varphi(z) \end{vmatrix} = 0$$

In dieser Determinante hat $\varphi(z)$ den Coefficienten $\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)$ und u_i den Coefficienten $-\Delta(\alpha_1, .., \alpha_{i-1}, z, \alpha_{i+1}, .., \alpha_n)$. Nun ist

$$\frac{\Delta(\alpha_1, .., \alpha_{i-1}, z, \alpha_{i+1}, .., \alpha_n)}{\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)} = \frac{\Delta(\alpha_1, .., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, .., \alpha_n, z)}{\Delta(\alpha_1, .., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, .., \alpha_n, \alpha_i)}$$

und nach der obigen Bezeichnung (8)

$$= \frac{f(z)}{(z-\alpha_i) f'(\alpha_i)}$$

folglich hat man*)

$$\varphi(z) = \frac{u_1}{f'(\alpha_1)}\frac{f(z)}{z-\alpha_1} + \ldots + \frac{u_n}{f'(\alpha_n)}\frac{f(z)}{z-\alpha_n}$$

zur Berechnung der Function $(n-1)$ten Grades, welche entsprechend den Werthen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ der Variablen die Werthe $u_1, \ldots, u_n$ annimmt. Die Unbekannte x_k ist der Coefficient von z^{k-1} in $\varphi(z)$, und erhält den oben angegebenen Werth, wenn man

$$\frac{f(z)}{z-\alpha_i} = z^{n-1} + C_{i1}z^{n-2} + \ldots$$

entwickelt (10).

12. Aus dem linearen System

$$\begin{array}{lll} x_1 + \ldots + x_n & = & 1 \\ x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n & = & t \\ \ldots & & \\ x_1\alpha_1^{n-1} + \ldots + x_n\alpha_n^{n-1} & = & t^{n-1} \end{array}$$

erhält man (§. 8, 1)

$$x_i \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ \ldots & \alpha_{i-1} & t & \alpha_{i+1} & \ldots \\ \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \ldots & \alpha_{i-1}^{n-1} & t^{n-1} & \alpha_{i+1}^{n-1} & \ldots \end{vmatrix}$$

$$x_i \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Delta(\ldots, \alpha_{i-1}, t, \alpha_{i+1}, \ldots)$$

Setzt man beiderseits das $i$te Element ans Ende, so bleibt übrig**)

$$x_i = \frac{f(t)}{(t-\alpha_i)f'(\alpha_i)} \quad . \; .$$

13. Aus dem allgemeinern linearen System

$$\begin{array}{lll} x_1 + \ldots + x_n & = & u_1 \\ x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n & = & u_2 \\ \ldots & & \\ x_1\alpha_1^{n-1} + \ldots + x_n\alpha_n^{n-1} & = & u_n \end{array}$$

---

*) Lagrange's Interpolationsformel (1795) J. de l'éc. polyt. Cah. 7—8 p. 117, welche von dem Fundamentalsatz über die gebrochenen Functionen sich nicht unterscheidet.

**) Lagrange Mém. de Berlin 1775 p. 185. Cauchy J. de léc. polyt. Cah. 17 p. 73.

findet man nach der angenommenen Bezeichnung (10)

$$x_i \Delta(\alpha_1, .., \alpha_n) = u_1 \delta_{i1} + .. + u_n \delta_{in}$$
$$x_i f'(\alpha_i) = u_1 C_{i,n-1} + u_2 C_{i,n-2} + ..\text{*)}$$

In der That ist

$$C_{i,n-1} + C_{i,n-2} z + C_{i,n-3} z^2 + .. = \frac{f(z)}{z-\alpha_i}$$

eine Function, welche bei $z = \alpha_i$ auf $f'(\alpha_i)$ sich reducirt und die bei den andern Werthen von z aus der Reihe $\alpha_1, .., \alpha_n$ verschwindet.

Anstatt der Grössen $C_{i,n-1}, C_{i,n-2}, ..$ findet man, wenn

$$f(z) = z^n + C_1 z^{n-1} + .. + C_{n-1} z + C_n$$

gegeben ist, andre Ausdrücke auf folgendem Wege**). Man bilde die Functionen

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z + C_1 \\ f_2(z) &= z^2 + C_1 z + C_2 \\ f_3(z) &= z^3 + C_1 z^2 + C_2 z + C_3 \end{aligned}$$

u. s. w. Dann hat man, weil $z^k - t^k$ durch $z - t$ theilbar ist,

$$\frac{f(z) - f(t)}{z - t} = f_{n-1}(z) + t f_{n-2}(z) + .. + t^{n-1}$$

und insbesondere, weil $f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..$ verschwinden,

$$\frac{f(z)}{z-\alpha_1} = f_{n-1}(z) + \alpha_1 f_{n-2}(z) + .. + \alpha_1^{n-1}$$

$$\frac{f(z)}{z-\alpha_2} = f_{n-1}(z) + \alpha_2 f_{n-2}(z) + .. + \alpha_2^{n-1}$$

u. s. w. Aus diesem System erhält man vermöge der gegebenen Gleichungen

$$f(z)\left\{\frac{x_1}{z-\alpha_1} + \frac{x_2}{z-\alpha_2} + .. + \frac{x_n}{z-\alpha_n}\right\}$$
$$= u_1 f_{n-1}(z) + u_2 f_{n-2}(z) + .. + u_n$$

Demnach erscheinen $x_1, x_2, ..$ als die Zähler der Partialbrüche, in welche man die gebrochene Function

---

*) Cauchy Anal. algébr. III, 1. Vergl. Lagrange Mém. de Berlin 1771 Réflexions art. 100.

**) Lagrange Mém. de Berlin 1792 p. 248. Vergl. Scheibner Leipziger Berichte 1856 p. 65.

$$\frac{u_1 f_{n-1}(z) + u_2 f_{n-2}(z) + \ldots + u_n}{f(z)}$$

zerlegen kann. Für $z = \alpha_i$ bleibt übrig

$$x_i f'(\alpha_i) = u_1 f_{n-1}(\alpha_i) + u_2 f_{n-2}(\alpha_i) + \ldots + u_n$$

Hiernach sind die Ausdrücke $f_1(\alpha_i)$, $f_2(\alpha_i)$, .. gleichbedeutend mit den oben gegebenen C_{i1}, C_{i2}, .. und enthalten die Grösse α_i nicht, wie man bei ihrer Bildung bestätigt findet.

Wenn insbesondere $u_1 = 1$, $u_2 = t$, $u_3 = t^2$, .. ist, so wird

$$f_{n-1}(z) + t f_{n-2}(z) + \ldots + t^{n-1} = \frac{f(t) - f(z)}{t - z}$$

$$f_{n-1}(\alpha_i) + t f_{n-2}(\alpha_i) + \ldots + t^{n-1} = \frac{f(t)}{t - \alpha_i}$$

in Uebereinstimmung mit (12).

14. Eine binäre Form $(2n-1)$ten Grades (eine homogene ganze Function der Variablen x und y) kann durch n Glieder, $(2n-1)$te Potenzen binärer Formen ersten Grades, ausgedrückt werden*). Denn die Form

$$a_0 x^{2n-1} + a_1 \binom{2n-1}{1} x^{2n-2} y + \ldots + a_{2n-1} y^{2n-1}$$

wird durch

$$b_1 (x + \alpha_1 y)^{2n-1} + b_2 (x + \alpha_2 y)^{2n-1} + \ldots + b_n (x + \alpha_n y)^{2n-1}$$

ausgedrückt, wenn die Coefficienten der Potenzen von x der Reihe nach mit den gegebenen Coefficienten übereinstimmen, wenn also $2n$ Functionen der Unbekannten $b_1, \ldots, b_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ebensoviel gegebene Werthe $a_0, \ldots, a_{2n-1}$ haben. Dagegen würde bei der analogen Darstellung einer binären Form $2n$ten Grades durch $2n$te Potenzen die Anzahl der Unbekannten von der Anzahl der für sie aufzustellenden Gleichungen verschieden sein.

---

*) Sylvester (Philos. Mag. 1851, II p. 391) hat diese Transformation gezeigt und den gesuchten Ausdruck den canonischen genannt. Ueber den canonischen Ausdruck einer binären Form geraden Grades hat Sylvester a. a. O. und Cambr. and Dublin math. J. 9 p. 93 Untersuchungen mitgetheilt. Vergl. Cayley Crelle J. 54 p. 48.

Die verlangte Transformation erfolgt unter den Bedingungen

$$\begin{array}{lll} a_0 & = b_1 & + \dots + b_n \\ a_1 & = b_1 \alpha_1 & + \dots + b_n \alpha_n \\ a_2 & = b_1 \alpha_1^2 & + \dots + b_n \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & = b_1 \alpha_1^{2n-1} & + \dots + b_n \alpha_n^{2n-1} \end{array}$$

Um denselben zu genügen, bildet man die Function

$$f(z) = (z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_n) = C_n + C_{n-1}z + \dots + C_1 z^{n-1} + z^n$$

welche verschwindet, wenn z einen der Werthe α_1, α_2, .. annimmt, und demgemäss aus der 1ten, 2ten, .. Bedingung, indem man jedesmal die n folgenden Bedingungen hinzuzieht, das System von Gleichungen

$$\begin{array}{lllll} C_n a_0 & + C_{n-1} a_1 & + \dots + C_1 a_{n-1} & + a_n & = 0 \\ C_n a_1 & + C_{n-1} a_2 & + \dots + C_1 a_n & + a_{n+1} & = 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \\ C_n a_{n-1} & + C_{n-1} a_n & + \dots + C_1 a_{2n-2} & + a_{2n-1} & = 0 \end{array}$$

Daher ist nun

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^n - f(z) \end{vmatrix} = 0$$

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & \dots & a_n & z \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_n & \dots & a_{2n-1} & z^n \end{vmatrix} = Af(z)$$

also sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $R = 0$. Diese Gleichung gehört zu den oben (5) betrachteten. Die Grössen $b_1, \dots, b_n$ werden dann aus den ersten n Bedingungen gefunden (13), und zwar ohne Unbestimmtheit, wenn die Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ endlich und von einander verschieden sind.

15. Wenn die ganze Function $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ in Bezug auf jede der Variablen den $(n-1)$ten Grad nicht übersteigt, und wenn

$$f(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)$$

so findet man durch wiederholte Anwendung von LAGRANGE's Interpolationsformel (11)

$$\frac{\varphi(t_1,..)}{f(t_1)} = \sum_h \frac{\varphi(\alpha_h,..)}{f'(\alpha_h)(t_1-\alpha_h)}$$

$$\frac{\varphi(\alpha_h,t_2,..)}{f(t_2)} = \sum_i \frac{\varphi(\alpha_h,\alpha_i,..)}{f'(\alpha_i)(t_2-\alpha_i)}$$

$$\frac{\varphi(t_1,..,t_n)}{f(t_1)..f(t_n)} = \sum_{h,i,..,p} \frac{\varphi(\alpha_h,\alpha_i,..,\alpha_p)}{f'(\alpha_h)..f'(\alpha_p)(t_1-\alpha_h)..(t_n-\alpha_p)}$$

eine Summe von n^n Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für $h, i, .., p$ alle Zahlen von 1 bis n setzt.

Wenn insbesondere die Function φ alternirend ist, mithin zu $\Delta(t_1,..,t_n)$ ein constantes Verhältniss hat (2), so verschwindet jedes Glied der Summe, in welchem die Nummern $h, i, .., p$ nicht alle von einander verschieden sind, und man hat für $h, i, .., p$ nur die Permutationen von $1, 2, .., n$ zu setzen. Dabei ist (7)

$$f'(\alpha_h)f'(\alpha_i)..f'(\alpha_p) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\Delta(\alpha_1,..,\alpha_n)^2$$

und der Quotient $\Delta(\alpha_h,\alpha_i,..,\alpha_p) : \Delta(\alpha_1,..,\alpha_n)$ hat den Werth 1 oder -1, je nachdem die Reihe $h, i, .., p$ mit $1, 2, .., n$ zu derselben Classe von Permutationen gehört oder nicht. Daher bilden die Glieder der Summe eine Determinante $n$ten Grades, und man hat*)

$$\frac{\Delta(t_1,..,t_n)\Delta(\alpha_1,..,\alpha_n)}{f(t_1)..f(t_n)} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \sum \pm \frac{1}{t_1-\alpha_1} .. \frac{1}{t_n-\alpha_n}$$

Anmerkung. Entwickelt man den Quotienten

$$\frac{\varphi(t_1,..,t_n)}{f(t_1)..f(t_n)}$$

nach fallenden Potenzen von $t_1, .., t_n$, und bezeichnet man den Coefficienten von $(t_1, t_2 .. t_n)^{-1}$ durch

$$\left[\frac{\varphi(t_1,..,t_n)}{f(t_1)..f(t_n)}\right]_{(t_1..t_n)^{-1}}$$

---

*) CAUCHY (Exerc. d'anal. 2 p. 154) hat diesen Satz gefunden und durch die im folgenden Artikel mitgetheilte Betrachtung bewiesen.

so erhält man auch in dem Falle, dass die Function φ in Bezug auf die einzelnen Variablen den $(n-1)$ten Grad übersteigt,

$$\left[\frac{\varphi(t_1,\ldots,t_n)}{f(t_1)\ldots f(t_n)}\right]_{(t_1\ldots t_n)^{-1}} = \Sigma\frac{\varphi(\alpha_h,\ldots,\alpha_p)}{f'(\alpha_h)\ldots f'(\alpha_p)}$$

also insbesondere

$$\left[\frac{\Delta(t_1,\ldots,t_n)\,\psi(t_1,\ldots,t_n)}{f(t_1)\ldots f(t_n)}\right]_{(t_1\ldots t_n)^{-1}} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\Sigma\frac{\psi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}{\Delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}\text{*)}$$

$$\left[\frac{\Delta(t_1,\ldots,t_n)^2 f'(t_1)\ldots f'(t_n)t_1^{m_1}\ldots t_n^{m_n}}{f(t_1)\ldots f(t_n)}\right]_{(t_1\ldots t_n)^{-1}}$$

$$= \Delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^2\,\Sigma\alpha_1^{m_1}\ldots\alpha_n^{m_n}\text{**)}$$

Die Glieder dieser beiden Summen werden aus den Permutationen der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gebildet.

16. Dass die Determinante

$$C = \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1-\alpha_1} & \ldots & \frac{1}{t_1-\alpha_n} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{1}{t_n-\alpha_1} & \ldots & \frac{1}{t_n-\alpha_n} \end{vmatrix}$$

den angegebenen Werth (15)

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{\Delta(t_1,\ldots,t_n)\,\Delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}{f(t_1)\ldots f(t_n)}$$

besitzt, wird durch folgende Betrachtung erkannt. Wenn man die Zeilen der Determinante C der Reihe nach mit $f(t_1), f(t_2), \ldots$ multiplicirt, so erhält man

$$Cf(t_1)\ldots f(t_n) = \Sigma\pm\frac{f(t_1)}{t_1-\alpha_1}\cdots\frac{f(t_n)}{t_n-\alpha_n}$$

eine ganze alternirende Function (2) sowohl von $t_1, \ldots, t_n$, als auch von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, und theilbar durch $\Delta(t_1,\ldots,t_n)\,\Delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Der Quotient ist eine von den Grössen $t_1, \ldots, t_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ unabhängige Zahl, welche sich dadurch ermitteln lässt, dass man den Grössen $t_1, \ldots, t_n$ der Reihe nach die Werthe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

---

*) Jacobi Crelle J. 22 p. 368.

**) Betti Crelle J. 54 p. 98.

zuertheilt. In diesem Falle verschwinden alle die Elemente der Determinante, welche neben der Diagonale stehn; daher bleibt von der Determinante nur ihr Anfangsglied übrig, welches in

$$f'(\alpha_1)f'(\alpha_2)\,.\,.\,f'(\alpha_n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\Delta(\alpha_1,\,.\,.,\,\alpha_n)^2$$

übergeht (7). Also ist

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

der gesuchte Quotient.

17. Die Adjuncte γ_{ik} des Elements $\frac{1}{t_i-\alpha_k}$ entsteht aus der Determinante C (16) durch Weglassung von t_i und α_k in den Reihen $t_1,\,.\,.,\,t_n$ und $\alpha_1,\,.\,.,\,\alpha_n$ und durch Multiplication mit $(-1)^{i+k}$. Daher hat man γ_{ik}

$$= (-1)^{i+k}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\frac{\Delta(\,.\,.,\,t_{i-1},\,t_{i+1},\,.\,.)\,\Delta(\,.\,.,\,\alpha_{k-1},\,\alpha_{k+1},\,.\,.)}{\frac{f(t_1)}{t_1-\alpha_k}\,.\,.\,\frac{f(t_{i-1})}{t_{i-1}-\alpha_k}\,\frac{f(t_{i+1})}{t_{i+1}-\alpha_k}\,.\,.\,\frac{f(t_n)}{t_n-\alpha_k}}$$

Indem man noch die Function

$$g(z) = (z-t_1)(z-t_2)\,.\,.\,(z-t_n)$$

bildet, findet man (8)

$$\Delta(\,.\,.,\,t_{i-1},\,t_{i+1},\,.\,.)\,\Delta(\,.\,.,\,\alpha_{k-1},\,\alpha_{k+1},\,.\,.) = (-1)^{i+k}\frac{\Delta(t_1,\,.\,.)\,\Delta(\alpha_1,\,.\,.)}{g'(t_i)f'(\alpha_k)}$$

$$(t_1-\alpha_k)\,.\,.\,(t_{i-1}-\alpha_k)(t_{i+1}-\alpha_k)\,.\,.\,(t_n-\alpha_k) = (-1)^{n-1}\frac{g(\alpha_k)}{\alpha_k-t_i}$$

und mit Hülfe dieser Werthe

$$\gamma_{ik} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{\Delta(t_1,\,.\,.)\,\Delta(\alpha_1,\,.\,.)}{f(t_1)\,.\,.\,f(t_n)}\,\frac{f(t_i)\,g(\alpha_k)}{g'(t_i)f'(\alpha_k)}\,\frac{1}{\alpha_k-t_i}$$

$$\frac{\gamma_{ik}}{C} = -\frac{f(t_i)}{g'(t_i)}\,\frac{g(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)}\,\frac{1}{t_i-\alpha_k}$$

18. Aus dem linearen System

$$\frac{x_1}{t_1-\alpha_1}+\,.\,.\,+\frac{x_n}{t_1-\alpha_n} = u_1$$

$$.\quad .\quad .\qquad .\quad .\quad .\qquad .\quad .\quad .$$

$$\frac{x_1}{t_n-\alpha_1}+\,.\,.\,+\frac{x_n}{t_n-\alpha_n} = u_n$$

findet man nach §. 8, 1

$$Cx_k = u_1\gamma_{1k} + \ldots + u_n\gamma_{nk}$$

mithin (17)

$$x_k = -\frac{g(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)}\left\{\frac{f(t_1)}{g'(t_1)}\frac{u_1}{t_1-\alpha_k} + \ldots + \frac{f(t_n)}{g'(t_n)}\frac{u_n}{t_n-\alpha_k}\right\}^{*)}$$

Anmerkung. Der besondere Fall, in welchem alle Zeilen und Colonnen des Systems

$$\begin{matrix} \frac{1}{t_1-\alpha_1} & \ldots & \frac{1}{t_1-\alpha_n} & u_1 \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \\ \frac{1}{t_n-\alpha_1} & \ldots & \frac{1}{t_n-\alpha_n} & u_n \end{matrix}$$

harmonische Reihen sind, kommt in der Theorie der approximativen Quadraturen vor (Gauss 1814 Comm. Gött. Tom. 3. Vergl. Jacobi Crelle J. 1 p. 301, Schellbach Crelle J. 16 p. 192, Scheibner Leipz. Berichte 1856 p. 73, u. A.) und ist von Joachimsthal Crelle J. 48 p. 411 neu behandelt worden. Vergl. auch Ligowski Grunert Archiv 36 p. 181.

19. Wenn man die Determinante (16 ff.)

$$C = \frac{\gamma_{i1}}{t_i-\alpha_1} + \ldots + \frac{\gamma_{in}}{t_i-\alpha_n}$$

nach t_i differentiirt, so erhält man eine neue Determinante, welche von C dadurch sich unterscheidet, dass die Elemente der $i$ten Zeile

$$\frac{-1}{(t_i-\alpha_1)^2}, \ldots, \frac{-1}{(t_i-\alpha_n)^2}$$

sind (§. 3, 15). Daher ist**)

$$(-1)^n \frac{\partial^n C}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{(t_1-\alpha_1)^2} & \ldots & \frac{1}{(t_1-\alpha_n)^2} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot \\ \frac{1}{(t_n-\alpha_1)^2} & \ldots & \frac{1}{(t_n-\alpha_n)^2} \end{vmatrix} = B$$

---

*) Hädenkamp Crelle J. 22 p. 184. 25 p. 182. Liouville J. 11 p. 466. Hermite Crelle J. 52 p. 43.

**) Borchardt Berl. Monatsbericht 1855 p. 165 und Crelle J. 53 p. 193.

20. Wenn man die Determinante B durch die Determinante C dividirt, so erhält man

$$\frac{B}{C} = \Sigma \frac{1}{(t_1-\alpha_h)(t_2-\alpha_i)\,..\,(t_n-\alpha_p)}$$

eine Summe, deren Glieder gebildet werden, indem man für $h, i, .., p$ alle Permutationen der Nummern $1, 2, .., n$ setzt*).

Beweis. Das Product

$$Bf(t_1)^2\,..\,f(t_n)^2 = \Sigma \pm \left\{\frac{f(t_1)}{t_1-\alpha_1}\,..\,\frac{f(t_n)}{t_n-\alpha_n}\right\}^2$$

ist eine ganze alternirende Function sowohl von $t_1, .., t_n$, als auch von $\alpha_1, .., \alpha_n$, und theilbar durch $\Delta(t_1, .., t_n)\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)$. Der Quotient ist eine symmetrische Function $\varphi(t_1, .., t_n)$, welche in Bezug auf jede der Variablen den $(n-1)$ten Grad erreicht und daher (15) durch

$$f(t_1)\,..\,f(t_n)\,\Sigma \frac{\varphi(\alpha_h, .., \alpha_p)}{f'(\alpha_h)\,..\,f'(\alpha_p)(t_1-\alpha_h)\,..\,(t_n-\alpha_p)}$$

dargestellt werden kann.

Wenn nun $t_1, t_2, .., t_n$ der Reihe nach die Werthe $\alpha_h, \alpha_i, .., \alpha_p$ erhalten, welche nicht alle von einander verschieden sind, so verschwindet

$$\frac{Bf(t_1)^2\,..\,f(t_n)^2}{\Delta(t_1, ..)\,\Delta(\alpha_1, ..)}$$

weil nicht nur B, sondern auch $\frac{f(t_1)^2}{t_2-t_1}$ verschwindet, während z. B. t_1 und t_2 mit α_h zusammenfallen. Also findet man alle nicht verschwindenden Glieder der Summe, indem man für $h, i, .., p$ alle Permutationen der Nummern $1, 2, .., n$ setzt. Wenn aber $t_1, t_2, .., t_n$ der Reihe nach die von einander verschiedenen Werthe $\alpha_h, \alpha_i, .., \alpha_p$ erhalten, so bleibt von der Determinante

$$\Sigma \pm \left\{\frac{f(t_1)}{t_1-\alpha_1}\,..\,\frac{f(t_n)}{t_n-\alpha_n}\right\}^2$$

nur ein Glied $\varepsilon\ [f'(\alpha_h)f'(\alpha_i)\,..\,f'(\alpha_p)]^2$ übrig, während

$$\Delta(\alpha_h, \alpha_i, .., \alpha_p) \text{ in } \varepsilon\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)$$

*) Borchardt a. a. O. Vergl. Joachimsthal Crelle J. 53 p. 166.

übergeht. Daher ist

$$\varphi(\alpha_h, \alpha_i, \ldots, \alpha_p) = \left\{ \frac{f'(\alpha_h) \ldots f'(\alpha_p)}{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \right\}^2 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} f'(\alpha_h) \ldots f'(\alpha_p)$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{Bf(t_1) \ldots f(t_n)}{\Delta(t_1, \ldots) \Delta(\alpha_1, \ldots)} = \Sigma \frac{1}{(t_1 - \alpha_h) \ldots (t_n - \alpha_p)}$$

Anmerkung. Nach (19) hat man die Identität

$$\Sigma \frac{1}{(t_1 - \alpha_h) \ldots (t_n - \alpha_p)} = \frac{(-1)^n}{C} \frac{\partial^n C}{\partial t_1 \ldots \partial t_n}$$

$$= (-1)^n \frac{f(t_1) \ldots f(t_n)}{\Delta(t_1, \ldots t_n)} \frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} \left\{ \frac{\Delta(t_1, \ldots, t_n)}{f(t_1) \ldots f(t_n)} \right\}$$

Der Differentialcoefficient (§. 3, 15) ist der Quotient einer alternirenden ganzen Function von $t_1, \ldots, t_n$, dividirt durch $f(t_1)^2 \ldots f(t_n)^2$. Indem man denselben durch $\Delta(t_1, \ldots, t_n)$ dividirt und den Quotienten mit $f(t_1) \ldots f(t_n)$ multiplicirt, erhält man die erzeugende Function aller ganzen symmetrischen Functionen von den Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$. Denn die Entwickelung der Identität nach fallenden Potenzen von $t_1, \ldots, t_n$ giebt einerseits die symmetrische Function der Wurzeln

$$\Sigma \alpha_h^{m_1} \alpha_i^{m_2} \ldots \alpha_p^{m_n}$$

andrerseits den Ausdruck derselben durch die Coefficienten der Gleichung, worüber man in der angeführten Abhandlung weitern Aufschluss findet.

21. Durch die Formel $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n | x_1, \ldots, x_m)$ wird das Product aller mn Differenzen $x_i - \alpha_k$ bezeichnet (vergl. 1). Dieses Product ist eine symmetrische Function der $x_1, \ldots, x_m$, und hat in Bezug auf jede Variable den Grad n.

Eine Function $(n-1)$ten Grades von x wird durch die Werthe bestimmt, welche die Function bei $x = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ hat; zur Construction dieser Function dient die Lagrange'sche Interpolationsformel (11). Ebenso wird eine symmetrische Function der $x_1, \ldots, x_m$, welche in Bezug auf jede Variable den Grad $n - m$ hat, durch die $\binom{n}{m}$ Werthe bestimmt, welche die Function erhält, wenn für $x_1, \ldots, x_m$ alle Combinationen $m$ten

Grades der gegebenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gesetzt werden. Von Borchardt ist eine specielle symmetrische ganze Function der $x_1, \ldots, x_m$, von Kronecker eine beliebige symmetrische Function φ, welche in Bezug auf jede Variable den Grad $n-m$ hat, durch die Summe*)

$$\Sigma\, \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\, \frac{D(\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n \mid x_1, \ldots, x_m)}{D(\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_m)}$$

ausgedrückt worden, eine Summe von $\binom{n}{m}$ Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ je m verschiedene Grössen der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ setzt.

Beweis. Die Summe ist eine symmetrische Function φ der $x_1, \ldots, x_m$, welche in Bezug auf jede Variable den Grad $n-m$ hat. Wenn in der Summe für $x_1, \ldots, x_m$ eine bestimmte Combination $m$ten Grades der α gesetzt wird, so sind alle Zähler D null bis auf einen, der dem Nenner D gleich ist; das übrig bleibende Glied der Summe ist der Werth, welchen die Function φ dadurch erhält, dass man für $x_1, \ldots, x_m$ jene Combination der α setzt.

Eine symmetrische Function χ der $x_1, \ldots, x_m$, welche in Bezug auf jede Variable den Grad $n-m$ hat, und der Reihe nach dieselben Werthe wie φ erhält, wenn für $x_1, \ldots, x_m$ alle Combinationen $m$ten Grades der α gesetzt werden, ist von φ nicht verschieden. Denn $\chi - \varphi$ ist eine Function $(n-m)$ten Grades z. B. von x_m, welche verschwindet, wenn für $x_1, \ldots, x_m$ alle Combinationen $m$ten Grades der α gesetzt werden. Diese Combinationen endigen entweder mit α_m oder mit den folgenden Grössen $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$, d. h. mit $n-m+1$ Grössen α. Eine Function von x_m des Grades $n-m$, welche bei $n-m+1$ Werthen $x_m = \alpha_m, \ldots, \alpha_n$ verschwindet, ist identisch null.

Wenn z. B. $F_1, F_2, \ldots$ ganze Functionen einer Variablen sind, eine $(m-1)$ten Grades und keine höhern Grades, $m < n$, so ist $\Sigma \pm F_1(x_1) \ldots F_m(x_m)$ eine alternirende ganze Function der $x_1, \ldots, x_m$, und durch das Product der Differenzen

*) Borchardt über eine Interpolationsformel. Abhandl. d. Berl. Acad. 1860 p. 1. Kronecker Berl. Monatsbericht 1865 Dec.

$\Delta(x_1, .., x_m)$ theilbar (2). Der Quotient ist eine symmetrische Function der $x_1, .., x_m$, die in Bezug auf jede Variable den Grad $n-m$ hat, und die von BORCHARDT durch n gegebene Werthe der Variablen auf die obige Weise interpolatorisch ausgedrückt worden ist. Die Anwendungen dieses Ausdrucks, namentlich auf die Reste, welche bei der Entwickelung des Quotienten ganzer Functionen in einen Kettenbruch entstehn, und auf die Nenner der Näherungsbrüche für denselben Kettenbruch, findet man in der angeführten Abhandlung.

§. 11. Norm, Resultante und Discriminante.

1. Wenn α eine eigentliche $n$te Wurzel der Einheit bedeutet, deren Potenzen $\alpha^2, .., \alpha^{n-1}$ von 1 verschieden sind, so hat eine ganze Function von x bei $x = \alpha$ den Werth φ, ein Polynomium von nicht mehr als n Gliedern*) der Art dass

$$\begin{aligned}
\varphi &= a_0 + a_1\alpha + .. + a_{n-1}\alpha^{n-1} \\
\alpha\varphi &= a_{n-1} + a_0\alpha + a_1\alpha^2 + .. \\
\alpha^2\varphi &= a_{n-2} + a_{n-1}\alpha + a_0\alpha^2 + ..
\end{aligned}$$

u. s. w. Der Werth φ ist $n$deutig, wie α; das Product der conjugirten Werthe $\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)$ .. heisst die Norm von φ, und wird ausgedrückt durch die Determinante $n$ten Grades**)

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\varphi(\alpha) &= \varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\,..\,\varphi(\alpha_n) \\
&= A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & .. & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & .. & a_{n-2} \\ . & . & .. & . \\ a_1 & a_2 & .. & a_0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

---

*) Vergl. WARING Misc. anal. 1762 p. 44, EULER 1764 (Nov. Comm. Petrop. 9 p. 70), LAGRANGE Réflexions .. 67 ff. (Mém. de Berlin 1771).

**) SPOTTISWOODE 1853 Crelle J. 51 p. 375. Dem daselbst gegebenen Ausdruck ist das Zeichen $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$ hinzuzufügen. Vergl. STERN Crelle J. 73 p. 374. Die »Norm einer complexen Zahl« als das Product der Zahl mit der conjugirten Zahl hat GAUSS 1831 eingeführt Theoria resid. biquadr. II §. 30. Das Zeichen N wird nach DIRICHLET 1842 Crelle J. 24 p. 295 gebraucht. Die »Norm einer mehrdeutigen algebraischen Function« findet man bei KUMMER de numeris complexis etc. Breslau 1844 (Liouv. J. 12 p. 187).

Beweis. Zu der ersten Colonne können die mit α, α^2, .. multiplicirten folgenden Colonnen addirt werden; die transformirte erste Colonne enthält die Elemente φ, $\alpha\varphi$, ... Also ist die Determinante A theilbar durch φ bei jedem α, mithin durch die Norm von φ. Weil A und die Norm Formen $n$ten Grades der a sind, so ist ihr Quotient unabhängig von den a, und beträgt 1, wie man aus den Anfangsgliedern der A und der Norm erkennt.

Von den n^n Gliedern des Products $\mathrm{N}\varphi$ bleiben nur die $n!$ Glieder der Determinante A übrig.

Anmerkung. Zufolge des Systems

$$\begin{aligned}
0 &= a_0 - \varphi + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots \\
0 &= a_{n-1} + (a_0-\varphi)\alpha + a_1\alpha^2 + \ldots \\
0 &= a_{n-2} + a_{n-1}\alpha + (a_0-\varphi)\alpha^2 + \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w. hat man

$$\chi = \begin{vmatrix} a_0-\varphi & a_1 & a_2 & . \\ a_{n-1} & a_0-\varphi & a_1 & . \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0-\varphi & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung $n$ten Grades für φ. Ihre Wurzeln φ_1, φ_2, .. sind die conjugirten Werthe, deren Product A, die Norm von φ. Die Adjuncten einer Zeile von χ sind bei $\varphi = \varphi_1$ von α_1 abhängig, und bilden, wenn eine derselben nicht null ist, eine geometrische Progression, deren Verhältniss α_1 ist.

2. Aus einer Zeile des Systems mit der Determinante A entspringt die folgende durch cyclische Verschiebung. Die Determinante A ist eine Form $n$ten Grades der a; in jedem Glied der Determinante haben die Nummern der a eine Summe, die durch n theilbar ist.

Bezeichnet man das Element der Zeile i und der Colonne k durch c_{ik}, und eine Permutation der Nummern 1 bis n durch rst .., so ist

$$c_{1r}\, c_{2s}\, c_{3t} \ldots = a_{r-1}\, a_{s-2}\, a_{t-3} \ldots$$

vorausgesetzt, dass von den $r-1$, $s-2$, $t-3$, .. jede negative um n vergrössert wird. Demgemäss ist

$$r-1+s-2+t-3+\ldots = \lambda n$$

wo λ eine der Zahlen 0 bis $n-1$, weil

$$r+s+t+\ldots = 1+2+3+\ldots$$

Z. B. für $n=3$ hat man, wenn α_1, α_2, α_3 die dritten Wurzeln von 1 sind,

$$\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\,\varphi(\alpha_3) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 - 3a_0a_1a_2$$

Setzt man $a_i = b_i x^i$, $x\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{y}$, so ist

$$\mathrm{N}(b_0 + b_1\sqrt[3]{y} + b_2\sqrt[3]{y^2}) = b_0^3 - (3b_0b_1b_2 - b_1^3)y + b_2^3y^2$$

eine Function 2ten Grades von x^3. U. s. w.

Die ganze Function $f(x)$ wird durch $A+Bx$, $C+Dx+Ex^2$, .. ausgedrückt, wenn durch A, B ganze Functionen von x^2, durch C, D, E ganze Functionen von x^3, u. s. w. bezeichnet werden. Daher ist, wenn $f(x)$ den $m$ten Grad hat,

$\mathrm{N}f(x\sqrt{1}) = f(-x)f(x)$ eine Function m. Gr. von x^2,

$\mathrm{N}f(x\sqrt[3]{1}) = f(\alpha x)f(\alpha^2 x)f(x)$ eine Function m. Gr. von x^3, u. s. w.

3. Umgekehrt wird die obige Determinante auf das Product zurückgeführt in Fällen, welche eine unmittelbare Angabe des Products zulassen. Z. B.

I. Wenn a_1, a_2, .., a_{n-1} den Werth 1 haben, so ist

$$\alpha_i + \alpha_i^2 + \ldots + \alpha_i^{n-1} + 1 = 0$$

$$\varphi(\alpha_1) = a_0 - 1, \ldots, \varphi(\alpha_{n-1}) = a_0 - 1,\ \varphi(\alpha_n) = a_0 - 1 + n$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & . \\ 1 & a_0 & 1 & . \\ 1 & 1 & a_0 & \\ . & . & . & \end{vmatrix} = (a_0 - 1 + n)(a_0 - 1)^{n-1}$$

II. Wenn a_0, a_1, a_2, .. eine geometrische Progression bilden, und zwar $a_0 = 1$, $a_1 = v$, u. s. w., so ist

$$\varphi = \frac{1-v^n}{1-v\alpha}.$$

Nun sind $1-v\alpha_1$, $1-v\alpha_2$, .. die Divisoren von $1-v^n$, daher

$$\begin{vmatrix} 1 & v & v^2 & .. & v^{n-1} \\ v^{n-1} & 1 & v & .. & v^{n-2} \\ . & . & . & .. & . \\ v & .. & v^2 & v^3 & .. & 1 \end{vmatrix} = (1-v^n)^{n-1}$$

III. Wenn a_2, a_3, .. verschwinden, so sind $a_0 + a_1\alpha_1$, $a_0 + a_1\alpha_2$, .. die Divisoren von $a_0^n - (-a_1)^n$, daher

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & & & \\ & a_0 & a_1 & & \\ & & . & . & \\ & & & a_0 & a_1 \\ a_1 & & & & a_0 \end{vmatrix} = a_0^n - (-a_1)^n$$

4. Aus den Coefficienten von 2 ganzen Functionen wird eine Determinante gebildet, welche entscheidet über die Existenz eines gemeinschaftlichen Divisors der beiden Functionen. Wenn

$$f = a_0 + a_1 y + .. + a_m y^m \qquad g = b_0 + b_1 y + .. + b_n y^n$$

so sind

$$f, \; yf, .., \; y^{n-1}f \quad \text{und} \quad g, \; yg, .., \; y^{m-1}g$$

$n+m$ lineare Formen der y^0, y^1, y^2, .., y^{m+n-1}. Die Determinante R derselben (§. 8, 1) ist die Determinante $(n+m)$ten Grades eines Systems von n Zeilen a und m Zeilen b mit dem Diagonalglied $a_0^n b_n^m$. Z. B. für $m = 4$, $n = 3$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \\ & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & & \\ & & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ & & & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

I. Durch Unterordnung der n Zeilen a unter die m Zeilen b entstehn $n$mal $n-1+m$ Zeichenwechsel der Determinante R. Nun ist $n(n-1)$ gerad, also erhält R bei Voranstellung der Zeilen b den Factor $(-1)^{mn}$.

II. Das Element der Zeile i und der Colonne k werde durch c_{ik} bezeichnet. Wenn i eine der Nummern 1 bis n, so ist $c_{ik} = a_{k-i}$, welches, wenn $k-i$ negativ oder mehr als m, null ist. Wenn i eine der Nummern 1 bis m, so ist $c_{n+i,k} = b_{k-i}$, welches, wenn $k-i$ negativ oder mehr als n, null ist. Also hat man

$$c_{1\alpha}\, c_{2\beta} \,..\, c_{n+1,r}\, c_{n+2,s} \,.. = a_{\alpha-1}\, a_{\beta-2} \,..\, b_{r-1}\, b_{s-2} \,..$$

Wenn $\alpha\beta \,..\, rs \,..$ eine Permutation der Nummern 1 bis $m+n$, so haben die Nummern der a und der b in dem entsprechenden Determinantenglied die Summe

$$\alpha - 1 + \beta - 2 + .. + r - 1 + s - 2 + .. = mn$$

weil

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta + .. + r + s + .. \\ &= 1 + 2 + .. + n + (n+1) + (n+2) + .. + (n+m) \end{aligned}$$

d. h. in jedem Glied der Determinante R haben die Nummern der a und der b die constante Summe mn.

III. Wenn die a, b Functionen von x sind, a_i des Grades $m-i$, b_i des Grades $n-i$, oder niedern Grades, so ist die Determinante R eine Function von x des Grades mn oder niedern Grades. Denn

$$\begin{aligned} &a_{\alpha-1} \text{ hat den Grad } m-(\alpha-1), .. \\ &b_{r-1} \text{ hat den Grad } n-(r-1), .. \end{aligned}$$

oder niedern Grad. Also hat ein Glied der Determinante den Grad

$$2mn - (\alpha - 1 + \beta - 2 + .. + r - 1 + s - 2 + ..) = mn$$

oder niedern Grad.

Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man die Zeilen des Systems der Reihe nach mit

$$x^{n-1}, .., x, 1, x^{m-1}, .., x, 1$$

multiplicirt, also R mit x^p, und man dann die Colonnen der Reihe nach durch $x^{m+n-1}, .., x, 1$ dividirt, also Rx^p durch x^q. Nun ist

$$p = \binom{n}{2} + \binom{m}{2}, \quad q = \binom{m+n}{2} = p + mn$$

also erhält man $R : x^{mn}$ als Determinante von Elementen, deren Grade 0 nicht übersteigen.

5. Wenn man in R zu der ersten Colonne die mit $y, y^2, \ldots$ multiplicirten folgenden Colonnen addirt, so erhält man

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \\ & a_0 & a_1 & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdot & \\ & b_0 & b_1 & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ yf & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ yg & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

und durch Entwickelung nach der ersten Colonne

$$R = Pf + Qg$$

wo P, Q gegebene Functionen von y sind, der Grade $n-1$, $m-1$, d. h. R kann aus f und g der Grade m und n mit bestimmten Multiplicatoren P, Q der Grade $n-1$ und $m-1$ componirt werden.

Ein gemeinschaftlicher Divisor der f, g ist ein Divisor von R: wenn f, g einen von y abhängigen gemeinschaftlichen Divisor haben, so ist $R=0$; wenn R nicht null, so haben f, g keinen von y abhängigen gemeinschaftlichen Divisor. Daher ist R eine Determinante der ganzen Functionen f, g:

$$\det(f, g) = R, \qquad \det(g, f) = (-1)^{mn} R \qquad (4. \text{ I})$$

Die Gleichung $R=0$ ist die durch Elimination von y formirte Resultante der Gleichungen $f=0$, $g=0$ (§. 8, 2); daher wird R auch die Resultante der Functionen f, g genannt.

6. Wenn $f = a_m(y-\alpha_1)\ldots(y-\alpha_m)$, $g = b_n(y-\beta_1)\ldots(y-\beta_n)$, so sind $g(\beta_1)$, $g(\beta_2)$, .. null, folglich

$$R = P(\beta_1)f(\beta_1) = P(\beta_2)f(\beta_2) = \ldots$$

d. h. R ist theilbar durch $f(\beta_1)$, $f(\beta_2)$, .., und theilbar durch das Product $f(\beta_1)\,f(\beta_2)\ldots$, die Norm des $n$deutigen Ausdrucks $f(\beta)$. Nun sind R und das Product Formen $n$ten Grades der a; der Quotient ist unabhängig von den a, und beträgt ${b_n}^m$, wie

man aus den Anfangsgliedern der R und des Products erkennt. Also hat man

$$g(\beta) = 0, \quad R = b_n^m \mathrm{N} f(\beta)$$
$$f(\alpha) = 0, \quad (-1)^{mn} R = a_m^n \mathrm{N} g(\alpha)$$

Da $f(\beta) = a_m(\beta-\alpha_1) \ldots (\beta-\alpha_m)$, so ist $\mathrm{N}f(\beta)$ das Product von a_m^n mit dem Product aller Differenzen $\beta-\alpha$, mithin

$$\det(f, g) = R = a_m^n b_n^m D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots | \beta_1, \beta_2, \ldots)$$

Hiernach ist die Determinante R eine Form $n$ten Grades der Coefficienten a, eine Form $m$ten Grades der Coefficienten b, eine symmetrische ganze Function sowohl der Wurzeln β, als auch der Wurzeln α.

Wenn die Determinante R null ist, so sind unter den Factoren $f(\beta_1)$, $f(\beta_2)$, .. einer oder mehrere null, unter den Wurzeldifferenzen $\beta - \alpha$ eine oder mehrere null: f, g sind beide theilbar durch eine bestimmte Function von y ersten oder höhern Grades.

Anmerkung. Die Aufstellung der Resultante von zwei algebraischen Gleichungen (aequatio finalis) ist von Euler (Mém. de Berlin 1748 p. 234) auf die Berechnung des Products $f(\beta_1) f(\beta_2)$ .. aus den einfachen symmetrischen Functionen der Wurzeln β zurückgeführt worden. Zu demselben Zweck hat Lagrange (Mém. de Berlin 1769 p. 303) den Logarithmus von R berechnet. Die Ableitung der Resultante aus einem linearen System ist gleichzeitig von Euler (Mém. de Berlin 1764 p. 96) und Bézout (Mém. de Paris 1764 p. 298) angegeben worden. Dabei wurden Determinanten gebraucht von Jacobi 1835 Crelle J. 15 p. 101. Von dieser Ableitung ist Sylvester's dialytische Methode (Philos. Mag. 1840 no. 101. Vergl. Richelot Crelle J. 21 p. 226) und Hesse's Verfahren (Crelle J. 27 p. 1) nicht wesentlich verschieden.

7. Die Identität des Products $b_n^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n)$ mit der Determinante R wird bestätigt*), indem man die Determinante

---

*) Borchardt Crelle J. 57 p. 183. Vergl. Hesse krit. Zeitschr. f. Math. 1858 p. 483 und Tortolini Ann. di Matem. 1859 p. 5.

$$P = \begin{vmatrix} f(\beta_1) & \beta_1 f(\beta_1) & . & . & \beta_1^{n-1}f(\beta_1) & g(\beta_1) & . & . & \beta_1^{m-1}g(\beta_1) \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ f(\beta_n) & \beta_n f(\beta_n) & . & . & \beta_n^{n-1}f(\beta_n) & g(\beta_n) & . & . & \beta_n^{m-1}g(\beta_n) \\ f(\alpha_1) & \alpha_1 f(\alpha_1) & . & . & \alpha_1^{n-1}f(\alpha_1) & g(\alpha_1) & . & . & \alpha_1^{m-1}g(\alpha_1) \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ f(\alpha_m) & \alpha_m f(\alpha_m) & . & . & \alpha_m^{n-1}f(\alpha_m) & g(\alpha_m) & . & . & \alpha_m^{m-1}g(\alpha_m) \end{vmatrix}$$

in das Product von R mit der Determinante

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & . & . & \beta_1^{n+m-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & \beta_n & . & . & \beta_n^{n+m-1} \\ 1 & \alpha_1 & . & . & \alpha_1^{n+m-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & \alpha_m & . & . & \alpha_m^{n+m-1} \end{vmatrix}$$

zerlegt (§. 6, 1). Zufolge der Gleichungen

$$f(\alpha_1) = 0, .., f(\alpha_m) = 0, \quad g(\beta_1) = 0, .., g(\beta_n) = 0$$

ist aber (§. 4, 2 und §. 10, 1)

$$P = \begin{vmatrix} f(\beta_1) & . & . & \beta_1^{n-1}f(\beta_1) \\ . & . & . & . \\ f(\beta_n) & . & . & \beta_n^{n-1}f(\beta_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g(\alpha_1) & . & . & \alpha_1^{m-1}g(\alpha_1) \\ . & . & . & . \\ g(\alpha_m) & . & . & \alpha_m^{m-1}g(\alpha_m) \end{vmatrix}$$

$$= f(\beta_1)..f(\beta_n)g(\alpha_1)..g(\alpha_m)\Delta(\beta_1, ..)\Delta(\alpha_1, ..)$$

Ferner ist identisch

$$Q = \Delta(\beta_1, .., \alpha_1, ..) = \frac{g(\alpha_1)..g(\alpha_m)}{b_n^m}\Delta(\alpha_1, ..)\Delta(\beta_1, ..)$$

folglich

$$b_n^m f(\beta_1)..f(\beta_n) = R$$

8. I. Wenn α eine von 0 verschiedene gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f = 0$, $g = 0$, und $y - \alpha$ ein gemeinschaftlicher Divisor der f, g ist, so hat man für $\alpha^0, \alpha^1, .., \alpha^{m+n-1}$ das lineare System von $n+m$ Gleichungen

$$f(\alpha) = 0, .., \alpha^{n-1}f(\alpha) = 0, \ g(\alpha) = 0, .., \alpha^{m-1}g(\alpha) = 0$$

dessen Determinante R null ist. Wenn nun die Adjuncte eines Elements der R z. B. des Elements a_0 der ersten Zeile nicht null ist, und die Adjuncten der ersten Zeile durch $\gamma_0, \gamma_1, ..$

bezeichnet werden, so hat das lineare System die Lösung (§. 8, 2)

$$1 : \alpha : \alpha^2 : .. = \gamma_0 : \gamma_1 : \gamma_2 : ..$$

Also haben die Gleichungen $f = 0$, $g = 0$ die gemeinschaftliche Wurzel $\alpha = \gamma_1 : \gamma_0$, und die Functionen f, g den gemeinschaftlichen Divisor ersten Grades $\gamma_0 y - \gamma_1$.

Wenn von den Adjuncten einer Zeile die erste nicht null ist, so bilden sie eine geometrische Progression, deren Verhältniss die gemeinschaftliche Wurzel α ist. Vergl. Jacobi Crelle J. 15 p. 106.

II. Wenn die Adjuncten aller Elemente null sind, und die Adjuncte einer Subdeterminante zweiten Grades z. B. adj $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ & a_0 \end{vmatrix}$ nicht null ist, so lässt man eine der beiden ersten Gleichungen weg, und vereinigt in dem System der übrigen Gleichungen die Glieder, welche α^0, α^1 enthalten, zu je einem Glied. Die Determinante dieses Systems ist null; von den Adjuncten der ersten Zeile δ, δ_2, δ_3, .. ist δ nicht null. Also hat das System die Lösung

$$1 : \alpha^2 : \alpha^3 : .. = \delta : \delta_2 : \delta_3 : ..$$

wo δ_2, δ_3, .. lineare Formen der α^0, α^1 sind, also lineare Functionen von α. Die Gleichung $\alpha^2 = \delta_2 : \delta$ für α hat die Wurzeln α_1, α_2, die gemeinschaftlichen Wurzeln der $f = 0$, $g = 0$, und f, g haben den gemeinschaftlichen Divisor zweiten Grades $(y - \alpha_1)(y - \alpha_2)$.

Bei $\alpha = \alpha_1$ bilden die Adjuncten δ_2, δ_3, .. eine geometrische Progression mit dem Verhältniss α_1; bei $\alpha = \alpha_2$ desgleichen. U. s. w.

9. Einfacher bildet man nach Weglassung der letzten Zeile a und der letzten Zeile b, z. B. für $m = 4$, $n = 3$ (4 und 5)

$$\begin{vmatrix} a_0 + a_1 y & a_2 & a_3 & a_4 & \\ a_0 y & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 + b_1 y & b_2 & b_3 & & \\ b_0 y & b_1 & b_2 & b_3 & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & a_2 & a_3 & a_4 & \\ yf & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ g & b_2 & b_3 & & \\ yg & b_1 & b_2 & b_3 & \\ y^2 g & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{d. i.} \quad S = S_0 + S_1 y = P_1 f + Q_1 g$$

ferner nach Weglassung der 2 letzten Zeilen a und der 2 letzten Zeilen b

$$\begin{vmatrix} a_0 + a_1 y + a_2 y^2 & a_3 & a_4 \\ b_0 + b_1 y + b_2 y^2 & b_3 & \\ b_0 y + b_1 y^2 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & a_3 & a_4 \\ g & b_3 & \\ yg & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{d. i.} \quad T = T_0 + T_1 y + T_2 y^2 = P_2 f + Q_2 g$$

U. s. w. Ein gemeinschaftlicher Divisor der f, g ist ein Divisor der componirten Functionen R, S, T, ... Wenn R null, und S nicht bei allen y null ist, so ist S der grösste gemeinschaftliche Divisor der f, g. Wenn R, S unbedingt null sind, und T nicht unbedingt null ist, so ist T der grösste gemeinschaftliche Divisor der f, g. In dem ersten Fall giebt $S = 0$ die gemeinschaftliche Wurzel der $f = 0$, $g = 0$; in dem zweiten Fall giebt $T = 0$ die zwei gemeinschaftlichen Wurzeln der $f = 0$, $g = 0$; u. s. w. Vergl. die 2te Auflage dieses Buchs 1864 p. 99 und meinen Aufsatz Leipziger Berichte 1873 p. 530.

10. Lösung des Systems ($f = 0$, $g = 0$) für x, y.

Wenn die Coefficienten a, b Functionen von x sind nach den oben (4. III) gemachten Voraussetzungen, so giebt es bestimmte x, y, welche dem System genügen. Oder in geometrischer Auffassung: die auf einer Ebene liegenden Linien $m$ter Ordnung $f = 0$ und $n$ter Ordnung $g = 0$ haben einen gemeinschaftlichen Punct $x|y$. Die Abscisse x desselben genügt der Gleichung $R = 0$.

I. Wenn $R = 0$ bei allen x, so haben die Functionen f, g bei allen x einen von y abhängigen gemeinschaftlichen Divisor h (9). Das System besteht aus der Gleichung $h = 0$ und dem System ($f : h = 0$, $g : h = 0$). Die Linien sind reducibel, sie haben eine Linie und eine Gruppe von einzelnen Puncten gemein.

II. Wenn R nicht unbedingt null ist, so ist R eine Function mnten (oder niedern) Grades von x, und die Gleichung $R = 0$ hat mn Wurzeln $x = x_1$, x_2, .., endlich oder nicht, real oder nicht, ungleich oder nicht. Unter den Voraussetzungen $dR = R'dx$, $dR' = R''dx$, .. ist R' componirt aus den

Adjuncten aller Elemente des Quadrats (§. 3, 15), R'' aus den Adjuncten der Elemente und den Adjuncten der Subdeterminanten zweiten Grades, u. s. w.

Wenn x_1 eine einfache Wurzel der $R = 0$, so ist $R'(x_1)$ nicht null; also sind bei $x = x_1$ die Adjuncten der Elemente nicht alle null, d. h. (8) f, g haben bei $x = x_1$ einen Divisor h gemein, der eine Function ersten Grades von y ist. Wenn y_1 die Wurzel der Gleichung $h = 0$, so ist $x_1|y_1$ ein gemeinschaftlicher Punct der Linien $f = 0$, $g = 0$, eine Lösung des Systems $(f = 0,\ g = 0)$. Man findet entsprechend der einfachen Wurzel x_2 der $R = 0$ den gemeinschaftlichen Punct $x_2|y_2$ der Linien, u. s. w., also mn getrennte gemeinschaftliche Puncte der Linien, wenn die Gleichung $R = 0$ nur einfache Wurzeln hat.

III. Wenn x_1 eine zweifache Wurzel der $R = 0$, so ist $R'(x_1) = 0$, $R''(x_1)$ nicht null. Bei $x = x_1$ ist dann entweder die Adjuncte eines Elements nicht null, oder die Adjuncte einer Subdeterminante zweiten Grades, d. h. f, g haben bei $x = x_1$ einen Divisor h gemein, der eine Function von y ersten oder zweiten Grades ist*). Wenn $h = 0$ ersten Grades ist mit der Wurzel y_1, so haben die Linien $f = 0$, $g = 0$ zwei vereinte Puncte $x_1|y_1$ gemein; sie haben daselbst einen 2punctigen Contact 12 an einer Tangente, die von der Geraden $x = x_1$ verschieden ist. Wenn $h = 0$ zweiten Grades ist mit den Wurzeln y_1, y_2, so haben die Linien die Puncte $x_1|y_1$, $x_1|y_2$ gemein, insbesondere bei $y_2 = y_1$ den 2punctigen Contact 12 an der Tangente $x = x_1$.

Durch eine 2fache Wurzel der $R = 0$ werden demnach 2 gemeinschaftliche Puncte der beiden Linien bestimmt, 2 Lösungen des Systems.

IV. Wenn x_1 eine dreifache Wurzel der $R = 0$, so ist $R'(x_1) = 0$, $R''(x_1) = 0$, $R'''(x_1)$ nicht null. Bei $x = x_1$ ist dann entweder die Adjuncte eines Elements nicht null, oder die Adjuncte einer Subdeterminante zweiten Grades, oder die

*) Die Klärung dieses Falls verdanke ich mündlicher Verhandlung mit Herrn Minnigerode 1880 Oct.

Adjuncte einer Subdeterminante dritten Grades, d. h. f, g haben bei $x = x_1$ einen Divisor h gemein, der eine Function von y ersten oder zweiten oder dritten Grades ist. Wenn $h = 0$ ersten Grades mit der Wurzel y_1, so haben die Linien 3 vereinte Puncte $x_1|y_1$ gemein, sie haben daselbst den 3punctigen Contact 123 an einer Tangente, die von der Geraden $x = x_1$ verschieden ist. Wenn $h = 0$ zweiten Grades ist mit den Wurzeln y_1, y_2, so haben die Linien die Puncte $x_1|y_1$, $x_1|y_2$ gemein, und mit einem derselben z. B. mit 2 ist ein gemeinschaftlicher Punct 3 vereint. Die Linien haben daselbst den 2punctigen Contact 23 an einer Tangente, die von der Geraden $x = x_1$ verschieden ist. Bei $y_2 = y_1$ findet dieser Contact in dem Punct 1 statt. Wenn $h = 0$ dritten Grades ist mit den Wurzeln y_1, y_2, y_3, so haben die Linien die Puncte $x_1|y_1$, $x_1|y_2$, $x_1|y_3$ gemein. Bei $y_3 = y_2$ haben die Linien den Contact 23, bei $y_3 = y_2 = y_1$ haben sie den Contact 123 an der Tangente $x = x_1$.

Durch eine 3fache Wurzel der $R = 0$ werden demnach 3 gemeinschaftliche Puncte der beiden Linien bestimmt, 3 Lösungen des Systems. U. s. w.

11. Wenn β eine Wurzel der Gleichung $g = 0$, so kann man das Polynomium

$$f = a_0 + a_1\beta + \ldots + a_m\beta^m$$

durch nicht mehr als n Glieder darstellen, indem man β^n, β^{n+1}, .. durch niedere Potenzen von β ausdrückt. Das Polynomium ist $n$deutig wie β, die conjugirten Werthe $f(\beta_1)$, $f(\beta_2)$, .. sind die Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades für f, deren Coefficienten ganze Functionen der a und b sind. Denn vermöge der n Gleichungen

$$\begin{array}{rlll} 0 = & a_0 - f + a_1\beta & + a_2\beta^2 & + \ldots \\ 0 = & & (a_0-f)\beta + a_1\beta^2 & + \ldots \\ 0 = & & & (a_0-f)\beta^2 + \ldots \end{array}$$

u. s. w. und der m Gleichungen $g(\beta) = 0$, $\beta g(\beta) = 0$, .. ist

$$\begin{vmatrix} a_0-f & a_1 & a_2 & .. \\ & a_0-f & a_1 & .. \\ & & a_0-f & .. \\ . & . & . & .. \\ b_0 & b_1 & b_2 & .. \\ & b_0 & b_1 & .. \\ & & b_0 & .. \\ . & . & . & .. \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung $n$ten Grades für f. Ihre Wurzeln f_1, f_2, .. sind die conjugirten Werthe, deren Product direct gefunden wird, übereinstimmend mit dem oben (6) gegebenen Ausdruck. Wenn f_1 eine einfache Wurzel der Gleichung ist, so bilden die Adjuncten der ersten Zeile bei $f = f_1$ eine geometrische Progression, deren Verhältniss β_1 ist. U. s. w.

Anmerkung. Die gefundene Gleichung trifft zusammen mit der nach Tschirnhausen*) zu bildenden Resolvente der Gleichung $g = 0$. Dabei wird die Resolvente durch Verfügungen über die Coefficienten der Hülfsfunction f zu einer besondern; jeder Wurzel der Resolvente entspricht eine bestimmte Wurzel der gegebenen Gleichung $g = 0$.

12. Aus den Functionen f, g der Grade m, n, deren Determinante R nicht null ist, kann eine gegebene Function φ des Grades $m+n-1$ oder niedern Grades componirt werden mit bestimmten Multiplicatoren p, q der Grade $n-1$, $m-1$, dergestalt dass $R\varphi$ durch $pf+qg$ ausgedrückt wird**). Denn zufolge des Systems von $1+n+m$ Zeilen

$$\begin{array}{rcl} \varphi &=& c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \,.. \\ f &=& a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \,.. \\ xf &=& \quad\;\; a_0 x + a_1 x^2 + \,.. \\ x^2 f &=& \qquad\qquad\; a_0 x^2 + \,.. \\ . & . & . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \\ g &=& b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \,.. \\ xg &=& \quad\;\; b_0 x + b_1 x^2 + \,.. \\ . & . & . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \end{array}$$

*) Brief an Leibniz 1677 April 17 und Acta Erud. 1683 p. 204. Vergl. Lagrange Mém. de Berlin 1770. Réflexions .. 10 ff.

**) Vergl. §. 8, 1. Jacobi Crelle J. 15 p. 108. Gauss (Demonstr. nova altera 8. Comm. Gött. III. 1815) hatte die Resultante der Function f und ihres Differentialcoefficienten f' durch $pf+qf'$ ausgedrückt.

ist identisch

$$\begin{vmatrix} \varphi & c_0 & c_1 & c_2 & . . \\ f & a_0 & a_1 & a_2 & . . \\ xf & & a_0 & a_1 & . . \\ . . . & & & . & . . \\ g & b_0 & b_1 & b_2 & . . \\ xg & & b_0 & b_1 & . . \\ . . . & & & . & . . \end{vmatrix} = 0$$

und durch Entwickelung nach der ersten Colonne

$$R\varphi - pf - qg = 0$$

Hieraus folgt

$$R\frac{\varphi}{fg} = \frac{q}{f} + \frac{p}{g}$$

d. h. wenn f, g einen gemeinschaftlichen Divisor nicht haben, so kann man die echtgebrochne Function $\varphi : fg$ in 2 Partialbrüche der Nenner f, g zerlegen, ohne die Wurzeln der Gleichung $fg = 0$ zu kennen.

13. Wenn die Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$ eine oder zwei oder mehr gemeinschaftliche Wurzeln haben, so sind unter den 1ten, 2ten, .. Differentialcoefficienten der Resultante R in Bezug auf die Variablen a_0, a_1, a_2, .. oder b_0, b_1, b_2, .. zwei oder drei oder mehr folgende durch eine homogene Gleichung ersten Grades verbunden.

Aus der Identität (5) $R = Pf + Qg$ findet man

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} = Px^i + \frac{\partial P}{\partial a_i}f + \frac{\partial Q}{\partial a_i}g$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_i}x - \frac{\partial R}{\partial a_{i+1}} = \left(\frac{\partial P}{\partial a_i}x - \frac{\partial P}{\partial a_{i+1}}\right)f + \left(\frac{\partial Q}{\partial a_i}x - \frac{\partial Q}{\partial a_{i+1}}\right)g$$

und auf demselben Wege

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_i^2}x^2 - 2\frac{\partial^2 R}{\partial a_i \partial a_{i+1}}x + \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i+1}^2}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial a_i^2}x^2 - 2\frac{\partial^2 P}{\partial a_i \partial a_{i+1}}x + \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i+1}^2}\right)f + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial a_i^2}x^2 - 2\frac{\partial^2 Q}{\partial a_i \partial a_{i+1}}x + \frac{\partial^2 Q}{\partial a_{i+1}^2}\right)g$$

u. s. w. Wenn nun x eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f = 0$, $g = 0$ ist, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{\partial R}{\partial a_i}x - \frac{\partial R}{\partial a_{i+1}} = 0\text{*)}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_i^2}x^2 - 2\frac{\partial^2 R}{\partial a_i \partial a_{i+1}}x + \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i+1}^2} = 0$$

u. s. w., welchen eine gemeinschaftliche Wurzel x genügt. In dem Falle, dass die erste Gleichung eine Identität ist, bestimmt die zweite Gleichung die beiden gemeinschaftlichen Wurzeln. U. s. w.

14. Die Determinante $(n+m)$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . \\ & a_0 & a_1 & a_2 & . \\ . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . \\ & b_0 & b_1 & b_2 & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

kann durch Verbindung der Zeilen in eine Determinante $n$ten oder $m$ten Grades zusammengezogen werden, je nachdem n oder m die grössre der beiden Zahlen ist.

I. Von besonderem Werth ist die Transformation in dem Fall $m = n$. Um die $n$te Zeile des Systems zu transformiren, multiplicire man die $n$te Zeile mit b_n und die vorangehenden Zeilen mit b_{n-1}, b_{n-2}, .., ebenso die $2n$te Zeile mit a_n und die vorangehenden mit a_{n-1}, a_{n-2}, ... Durch Subtraction der $2n$ten Zeile von der $n$ten, der $(2n-1)$ten Zeile von der $(n-1)$ten, .. bilde man nun unter Anwendung der Bezeichnung

$$d_{ik} = a_i b_k - a_k b_i$$

die Zeilen

$$\begin{matrix} d_{01} & d_{11} & . \; . & d_{n-1,1} & d_{n1} & & \\ & d_{02} & . \; . & d_{n-2,2} & d_{n-1,2} & d_{n2} & \\ & & . \; . & . & . & . & \\ & & & d_{0n} & d_{1n} & d_{2n} & . \; . \end{matrix}$$

---

*) Richelot Crelle J. 21 p. 228.

Die Addition dieser Zeilen ergiebt für die $n$te Zeile von $b_n R$ die Elemente

$$d_{01} \quad d_{02} \quad . \; . \quad d_{0n} \quad 0 \quad 0 \quad . \; .$$

weil $d_{ii} = 0$, $d_{ki} = -d_{ik}$, und daher die Summe

$$d_{i1} + d_{i-1,2} + \ldots + d_{1i} = 0$$

Auf dieselbe Weise transformirt man die $(n-1)$te, $(n-2)$te, .. Zeile. Man multiplicirt die $(n-i)$te Zeile mit b_n, die vorangehenden Zeilen mit b_{n-1}, b_{n-2}, .. u. s. w. und findet endlich die Elemente der $(n-i)$ten Zeile von $b_n{}^{i+1}R$ durch Addition der abgeleiteten Zeilen

$$\begin{array}{cccccccccc}
d_{0,i+1} & d_{1,i+1} & . \; . & d_{n-i-1,i+1} & . \; . & d_{n,i+1} & & \\
& d_{0,i+2} & . \; . & d_{n-i-2,i+2} & . \; . & d_{n-1,i+2} & d_{n,i+2} & \\
& & . \; . & . & . \; . & . & . & . \\
& & & d_{0n} & . \; . & d_{i+1,n} & d_{i+2,n} & . \; .
\end{array}$$

Bezeichnet man das $(k+1)$te Element der $(n-i)$ten Zeile durch c_{ik}, so hat man

$$c_{ik} = d_{0,i+k+1} + d_{1,i+k} + \ldots + d_{k,i+1}$$

Analog ist

$$c_{ki} = d_{0,i+k+1} + d_{1,i+k} + \ldots + d_{i,k+1} = c_{ik}$$

weil die Summe $d_{i+1,k} + d_{i,k+1} + \ldots + d_{k,i+1}$ identisch verschwindet. Insbesondere hat man

$$c_{i,n-1} = d_{in}, \qquad c_{in} = 0$$

weil a_r und b_r als verschwindend zu betrachten sind, wenn $r > n$.

Hiernach ist nun

$$b_n{}^n R = \left| \begin{array}{cccccc}
c_{n-1,0} & . \; . & c_{n-1,n-1} & & & \\
. & . \; . & . & & & \\
c_{00} & . \; . & c_{0,n-1} & & & \\
b_0 & . \; . & b_{n-1} & b_n & & \\
& b_0 \; . & . & b_{n-1} & b_n & \\
& . & . & . & . & .
\end{array} \right|$$

Bezeichnet man die Determinante $\Sigma \pm c_{00} \ldots c_{n-1,n-1}$ durch S, so ist (§. 4, 2) $b_n{}^n R$ das Product von $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}S$ mit einer

Determinante $n$ten Grades, die von ihrem Anfangsglied $b_n{}^n$ sich nicht unterscheidet. Also ist*)

$$R = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} S$$

Beispiele. Wenn f und g vom 2ten Grade sind, so wird

$$R = -S = -\begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} \\ d_{02} & d_{12} \end{vmatrix}$$

Wenn f und g vom 3ten Grade sind, so findet man

$$R = -S = -\begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} & d_{03} \\ d_{02} & d_{03} + d_{12} & d_{13} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} \end{vmatrix}$$

Wenn f und g vom 4ten Grade sind, so findet man

$$R = S = \begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} \\ d_{02} & d_{03} + d_{12} & d_{04} + d_{13} & d_{14} \\ d_{03} & d_{04} + d_{13} & d_{14} + d_{23} & d_{24} \\ d_{04} & d_{14} & d_{24} & d_{34} \end{vmatrix}$$

Diese Determinanten können nach §. 5, 5 weiter entwickelt werden, wobei die Identität

$$d_{ik} d_{lm} + d_{kl} d_{im} + d_{li} d_{km} = 0$$

(§. 3, 9) zur Verfügung steht.

II. Wenn $m < n$, so bilde man durch Hinzufügung von $n - m$ Zeilen,

$$\begin{matrix} b_0 & b_1 & . & . & b_n & & \\ & b_0 & b_1 & . & . & b_n & \\ & & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

welche auf der Diagonale endigen, die Determinante $2n$ten Grades $b_n{}^{n-m} R$, und verwandle dieselbe auf die angegebene Art in eine Determinante $n$ten Grades, so dass

$$b_n{}^{n-m} R = \begin{vmatrix} c_{n-1,0} & . & . & c_{n-1,n-1} \\ . & . & . & . \\ c_{00} & . & . & c_{0,n-1} \end{vmatrix}$$

*) Vergl. unten (15).

Diese Determinante ist durch b_n^{n-m} theilbar, als Product der beiden Determinanten $n$ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . \\ & a_0 & a_1 & . \\ & & . & . \\ & & & . \\ c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & . & . \\ . & . & . & . \\ c_{00} & c_{01} & . & . \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_n & b_{n-1} & . & . & b_{m+1} & & \\ & b_n & . & . & b_{m+2} & & \\ & & . & . & . & & \\ & & & & b_n & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & . \\ & & & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Man findet nämlich durch Composition der ersten Colonne in der ersten Determinante mit den Colonnen der zweiten Determinante die erste Colonne des Products, u. s. w. In der That ist

$$a_0 b_{m+i+1} + \ldots + a_i b_{m+1} = d_{0,m+i+1} + \ldots + d_{i,m+1} = c_{mi}$$

weil $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ als verschwindend zu betrachten sind. Die zweite Determinante hat den Werth b_n^{n-m}, also ist R der ersten Determinante gleich*).

15. Die abgekürzte Form der Determinante R (14) ist von Bézout (Mém. de Paris 1764 p. 317) durch ein Verfahren erreicht worden, welches Jacobi (Crelle J. 15 p. 101. Vergl. Cauchy Exerc. d'Anal. 1840 p. 393) in Erinnerung gebracht und durch neue wesentliche Bemerkungen beleuchtet hat. Aus den gegebenen Functionen f und g, welche beide als Functionen $n$ten Grades vorausgesetzt werden, bildet man mit Hülfe geeigneter Multiplicatoren n bestimmte Functionen $(n-1)$ten Grades $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, welche mit f und g zugleich verschwinden. Dann ergiebt sich die Resultante von f und g und der gemeinschaftliche Divisor dieser Functionen aus dem System der Gleichungen $u_0 = 0, \ldots, u_{n-1} = 0$. Es ist nämlich $(r = 0, 1, \ldots, n-1)$

$$\begin{vmatrix} f & a_{r+1} + a_{r+2}x + \ldots \\ g & b_{r+1} + b_{r+2}x + \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r & a_{r+1} + a_{r+2}x + \ldots + a_n x^{n-r-1} \\ b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r & b_{r+1} + b_{r+2}x + \ldots + b_n x^{n-r-1} \end{vmatrix}$$

---

*) Vergl. Rosenhain Crelle J. 28 p. 268.

eine Function $(n-1)$ten Grades, welche aus f und g componirt bei $f = 0$, $g = 0$ null ist, und durch

$$u_r = c_{r0} + c_{r1} x + .. + c_{r,n-1} x^{n-1}$$

bezeichnet wird. Unter Anwendung der Bezeichnung

$$d_{ik} = \begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix}$$

findet man (§. 3, 6)

$$c_{r0} = d_{0,r+1}, \quad c_{r1} = d_{0,r+2} + d_{1,r+1}, \quad c_{r2} = d_{0,r+3} + d_{1,r+2} + d_{2,r+1}, ..$$
$$c_{rs} = d_{0,r+s+1} + d_{1,r+s} + .. + d_{s,r+1}$$

und analog

$$c_{sr} = d_{0,s+r+1} + d_{1,s+r} + .. + d_{r,s+1} = c_{rs} \text{*)}$$

weil die Summe $d_{s+1,r} + .. + d_{r,s+1}$ conträrgleiche Glieder hat und darum null ist.

Die Functionen $u_0, u_1, .., u_{n-1}$ sind lineare Formen der $x^0, x^1, .., x^{n-1}$ mit der Determinante $S = \Sigma \pm c_{00} .. c_{n-1,n-1}$. Eine gemeinschaftliche Wurzel x der Gleichungen $f = 0$, $g = 0$ genügt dem System $(u_0 = 0, .., u_{n-1} = 0)$. Wenn nun die Determinante S null, und dabei adj c_{00} nicht null ist, so genügen dem System x^0, x^1, x^2, .., welche proportional sind, den Adjuncten der ersten Zeile. Für die gemeinschaftliche Wurzel x existirt die Gleichung ersten Grades

$$T = \begin{vmatrix} c_{10} + c_{11} x & c_{12} & . \\ c_{20} + c_{21} x & c_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = 0$$

Die Functionen f, g sind durch T theilbar, ihr grösster gemeinschaftlicher Divisor ist ersten Grades.

Die Adjuncte des Elements c_{ik} werde durch γ_{ik} bezeichnet. Weil $c_{ki} = c_{ik}$, so ist $\gamma_{ki} = \gamma_{ik}$ (§. 3, 5). Wenn $S = 0$, γ_{00} nicht null, so bilden die Adjuncten der ersten Zeile eine geometrische Progression, deren Verhältniss die gemeinschaftliche Wurzel x ist. Also sind die Adjuncten der ersten Zeile, ebenso

*) Jacobi l. c. p. 102.

die der ersten Colonne, mithin die Adjuncten aller Elemente nicht null. Folglich ist

$$\gamma_{sr} : \gamma_{si} = x^r : x^i, \qquad \gamma_{is} : \gamma_{ik} = x^s : x^k$$

und durch Multiplication

$$\gamma_{rs} : \gamma_{ik} = x^{r+s} : x^{i+k}$$

Unter der Bedingung $i+k = r+s$ sind γ_{ik} und γ_{rs} einander gleich, und man kann ihren gemeinschaftlichen Werth durch γ_{i+k} bezeichnen. Demnach bilden die Adjuncten γ_0, γ_1, .., γ_{2n-2} eine geometrische Progression, deren Verhältniss die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$ ist.*)

Wenn aber γ_0 null ist und adj $(c_{00}c_{11} - c_{10}c_{01})$ nicht null, so wird dem System dadurch genügt, dass $1 : x^2 : x^3 : ..$ sich verhalten, wie die Adjuncten der ersten Zeile in T. Für die gemeinschaftliche Wurzel x existirt die Gleichung zweiten Grades

$$U = \begin{vmatrix} c_{20} + c_{21}x + c_{22}x^2 & c_{23} & . \\ c_{30} + c_{31}x + c_{32}x^2 & c_{33} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

so dass U der grösste gemeinschaftliche Divisor der f, g ist. U. s. w.

Da die Determinante S wie R (4) eine Form $n$ten Grades sowohl der a_0, a_1, .. als auch der b_0, b_1, .. ist, so ist der Quotient $S : R$ eine von diesen Grössen unabhängige Zahl. Das Anfangsglied von R ist $a_0{}^n b_n{}^n$ und kommt in dem Anfangsglied von

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} S = \begin{vmatrix} c_{n-1,0} & . & . & c_{n-1,n-1} \\ . & . & . & . \\ c_{00} & . & . & c_{0,n-1} \end{vmatrix}$$

mit demselben Zeichen vor. Daher ist $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} S : R = 1$, wie oben (14) durch directe Transformation gezeigt wurde.

---

*) Jacobi l. c. p. 106.

16. Cayley hat die Berechnung der Resultante von f und g auf die Entwickelung der symmetrischen ganzen Function (§. 10, 2)

$$F(x, y) = \frac{f(x)\,g(y) - f(y)\,g(x)}{y-x} = \Sigma c_{ik} x^i y^k \qquad (i, k = 0, \ldots, n-1)$$

gegründet*). Dabei wird vorausgesetzt, dass f vom $m$ten Grade, g vom $n$ten Grade, und $m \leq n$ ist (4). Weil $F(x, y) = F(y, x)$, so ist $c_{ik} = c_{ki}$.

Setzt man $a_i b_k - a_k b_i = d_{ik}$, so erhält man

$$\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 x + \ldots)(b_0 + b_1 y + \ldots) - (b_0 + b_1 x + \ldots)(a_0 + a_1 y + \ldots) \\
&\quad = d_{01}(y-x) + d_{02}(y^2-x^2) + \ldots + d_{0n}(y^n - x^n) \\
&\qquad + d_{12}(xy^2 - x^2 y) + \ldots + d_{1n}(xy^n - x^n y) \\
&\qquad + \ldots \\
&\qquad + d_{n-1,n}(x^{n-1} y^n - x^n y^{n-1})
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
F(x, y) = d_{01} &+ d_{02}(y+x) + \ldots + d_{0n}(y^{n-1} + \ldots + x^{n-1}) \\
&+ d_{12} xy \quad + \ldots + d_{1n}(y^{n-2} + \ldots + x^{n-2}) xy \\
&+ \ldots \\
&+ d_{n-1,n} x^{n-1} y^{n-1}
\end{aligned}$$

Indem man die Glieder absondert, welche $x^i y^k$ enthalten, findet man wie oben (14 und 15)

$$c_{ik} = d_{0,i+k+1} + d_{1,i+k} + d_{2,i+k-1} + \ldots$$

Abgesehn von dieser Entwickelung ist

$$F(\beta_i, \beta_k) = 0, \qquad F(\beta_i, \beta_i) = f(\beta_i)\, g'(\beta_i)$$

folglich

$$\Sigma \pm F(\beta_1, \beta_1) \ldots F(\beta_n, \beta_n) = f(\beta_1) \ldots f(\beta_n)\, g'(\beta_1) \ldots g'(\beta_n)$$

Wenn man beide Seiten durch $\varDelta(\beta_1, \ldots, \beta_n)^2$ dividirt, so findet man (§. 10, 3 und 7)

$$\begin{aligned}
\Sigma \pm c_{00} \ldots c_{n-1,n-1} &= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} b_n^{\,n} f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} b_n^{\,n-m} R \ (5)
\end{aligned}$$

*) Vergl. Sylvester's Mittheilung Philos. Trans. 1853 p. 516. Hermite Crelle J. 52 p. 47 Anm. Cayley Crelle J. 53 p. 366. Borchardt Crelle J. 53 p. 367 und 57 p. 112.

Die Theilbarkeit der Determinante durch b_n^{n-m} ist oben (13) nachgewiesen worden.

17. ROSENHAIN hat die Resultante der Functionen f und g interpolatorisch durch die Werthe von f und g ausgedrückt, welche $m+n$ gegebenen Werthen des Arguments x entsprechen*). Diese Werthe von f sind eben so wenig von einander unabhängig, als die Werthe von g, weil f durch $m+1$ und g durch $n+1$ Werthe bestimmt ist (§. 10, 11).

Nach (6) ist die Resultante $R = b_n^m f(\beta_1)\,..\,f(\beta_n)$, eine symmetrische Function der $\beta_1, .., \beta_n$, welche in Bezug auf jede dieser Grössen den Grad m hat, und durch $\varphi(\beta_1, .., \beta_n)$ bezeichnet wird. Also hat man nach KRONECKER, indem man in §. 10, 21 die Nummern m, n durch n, $n+m$, und α_i durch x_i ersetzt,

$$\varphi(\beta_1, .., \beta_n) = \Sigma\varphi(x_1, .., x_n)\frac{D(\beta_1, .., \beta_n \mid x_{n+1}, .., x_{n+m})}{D(x_1, .., x_n \mid x_{n+1}, .., x_{n+m})}$$

Nun ist $\varphi(x_1, .., x_n) = b_n^m f(x_1)\,..\,f(x_n)$,

$$b_n(x_{n+1}-\beta_1)\,..\,(x_{n+1}-\beta_n) = g(x_{n+1})$$

u. s. w., folglich

$$R = \Sigma\frac{f(x_1)\,..\,f(x_n)\,g(x_{n+1})\,..\,g(x_{n+m})}{D(x_1, .., x_n \mid x_{n+1}, .., x_{n+m})}$$

eine Summe von $\binom{n+m}{n}$ Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für $x_1, .., x_n$ alle Combinationen $n$ten Grades der Grössen $x_1, .., x_{n+m}$ setzt.

Anmerkung. Mit Hülfe dieser Formel hat ROSENHAIN a. a. O. CAUCHY's interpolatorische Darstellung einer gebrochenen algebraischen Function**) abgeleitet.

Die Resultante von f und $(x-z)g$ ist $Rf(z)$, und wird nach der angegebenen Regel durch die Werthe der beiden

---

*) Crelle J. 30 p. 157. Vergl. KRONECKER Berl. Monatsbericht 1865 p. 690.

**) CAUCHY Anal. algébr. Note 5. Vergl. JACOBI Crelle J. 30 p. 127.

Functionen ausgedrückt, welche $m+n+1$ Werthen von x entsprechen, wie folgt:

$$\Sigma \frac{f(x_0)\,..\,f(x_n)\,g(x_{n+1})\,..\,g(x_{n+m})(x_{n+1}-z)\,..\,(x_{n+m}-z)}{D(x_0,\,..,\,x_n\mid x_{n+1},\,..,\,x_{n+m})}.$$

Die Resultante von $(x-z)\,f(x)$ und $g(x)$ ist $Rg(z)$ und nach derselben Regel

$$\Sigma \frac{f(x_0)\,..\,f(x_{n-1})\,g(x_n)\,..\,g(x_{n+m})(x_0-z)\,..\,(x_{n-1}-z)}{D(x_0,\,..,\,x_{n-1}\mid x_n,\,..,\,x_{n+m})}.$$

Durch Division erhält man, nachdem man den Zähler und den Nenner durch $g(x_0)\,..\,g(x_{n+m})$ dividirt und den Quotienten $f(x_i):g(x_i)$ durch u_i bezeichnet hat,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\Sigma \dfrac{u_1\,..\,u_n}{D(x_0,\,..,\,x_n\mid x_{n+1},\,..,\,x_{n+m})}(x_{n+1}-z)\,..\,(x_{n+m}-z)}{\Sigma \dfrac{u_0\,..\,u_{n-1}}{D(x_0,\,..,\,x_{n-1}\mid x_n,\,..,\,x_{n+m})}(x_0-z)\,..\,(x_{n-1}-z)}$$

18. I. Borchardt hat die Resultante der Functionen f und g, beide $n$ten Grades, interpolatorisch durch die Werthe von f und g ausgedrückt, welche $n+1$ gegebenen Werthen $x_0,\ x_1,\,..,\ x_n$ des Arguments x entsprechen*)

Unter der Voraussetzung (15)

$$F(x,y) = \frac{f(x)\,g(y)-f(y)\,g(x)}{y-x} = \Sigma c_{ik}x^i y^k$$

ist die Determinante $\Sigma \pm c_{00}\,..\,c_{n-1,n-1}$ der Resultante R gleich oder entgegengesetzt gleich. Nach §. 10, 3 hat man aber

$$\Sigma \pm c_{00}\,..\,c_{n-1,n-1} = \frac{\Sigma \pm F(x_1,x_1)\,..\,F(x_n,x_n)}{\Delta(x_1,\,..,\,x_n)^2}$$

Bildet man nun die Function $(n+1)$ten Grades

$$\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\,..\,(x-x_n)$$

so ist (§. 10, 8)

$$\Delta(x_1,\,..,\,x_n)^2 = \frac{\Delta(x_0,\,x_1,\,..,\,x_n)^2}{\varphi'(x_0)^2} = \frac{\varphi'(x_1)^2\,..\,\varphi'(x_n)^2}{\Delta(x_0,\,..,\,x_n)^2}$$

*) Berl. Monatsbericht 1859 p. 376 und Crelle J. 57 p. 111.

Nach Einführung der Elemente

$$h_{ik} = \frac{F(x_i, x_k)}{\varphi'(x_i)\,\varphi'(x_k)} = h_{ki}$$

erhält man daher

$$\Sigma \pm c_{00} \ldots c_{n-1,n-1} = \varDelta(x_0, \ldots, x_n)^2\, \Sigma \pm h_{11} \ldots h_{nn}$$

Eine besondere Eigenschaft der Elemente dieser letztern Determinante ergiebt sich daraus, dass $F(x, y)$ in Bezug auf x vom $(n-1)$ten Grade, dagegen $\varphi(x)$ vom $(n+1)$ten Grade ist, dass also (§. 10, 9)

$$\frac{F(x_0, y)}{\varphi'(x_0)} + \frac{F(x_1, y)}{\varphi'(x_1)} + \ldots + \frac{F(x_n, y)}{\varphi'(x_n)} = 0$$

Demnach ist

$$h_{0k} + h_{1k} + \ldots + h_{nk} = 0$$

also insbesondere

$$\begin{aligned} -h_{00} &= h_{01} + h_{02} + \ldots + h_{0n} \\ -h_{11} &= h_{01} + h_{12} + \ldots + h_{1n} \\ -h_{22} &= h_{02} + h_{12} + \ldots + h_{2n} \end{aligned}$$

u. s. w. Nun haben in der verschwindenden Determinante $(n+1)$ten Grades $(-1)^{n+1}\, \Sigma \pm h_{00}\, h_{11} \ldots h_{nn}$ alle Elemente gleiche Adjuncten (§. 3, 12), deren gemeinschaftlicher Werth durch die Formel

$$[0, 1, \ldots, n]$$

bezeichnet wird. Also ist

$$\Sigma \pm c_{00} \ldots c_{n-1,n-1} = (-1)^n\, \varDelta(x_0, \ldots, x_n)^2\, [0, 1, \ldots, n]$$

II. Die Formel $[0, 1, \ldots, n]$ d. h. die Determinante $n$ten Grades

$$\begin{vmatrix} h_{01} + \ldots + h_{1n} & -h_{12} & -h_{13} & . \\ -h_{21} & h_{02} + \ldots + h_{2n} & -h_{23} & . \\ -h_{31} & -h_{32} & h_{03} + \ldots + h_{3n} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

ist von BORCHARDT a. a. O. nach den Producten der in der Diagonale stehenden Grössen $h_{01}, h_{02}, \ldots, h_{0n}$ entwickelt worden (vergl. §. 5, 3).

Der Theil derselben, welcher keine dieser Grössen enthält,

$$\begin{vmatrix} h_{12}+\ldots+h_{1n} & -h_{12} & -h_{13} & . \\ -h_{21} & h_{12}+\ldots+h_{2n} & -h_{23} & . \\ -h_{31} & -h_{32} & h_{13}+\ldots+h_{3n} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

ist wiederum eine verschwindende Determinante (§. 3, 12), in welcher alle Elemente dieselbe Adjuncte haben, die durch $[1, 2, \ldots, n]$ bezeichnet wird. Daher ist der Theil der gesuchten Entwickelung, welcher je eine der Grössen h_{01}, h_{02}, .. enthält,

$$h_{01}[1, 2, \ldots, n] + h_{02}[1, 2, \ldots, n] + \ldots$$

Der Theil von $[0, 1, \ldots, n]$, welcher das Product $h_{01}\, h_{02}$ enthält, ist eine Subdeterminante $(n-2)$ten Grades, die aus der Determinante $[2, 3, \ldots, n]$ dadurch gebildet werden kann, dass man die in der Diagonale stehenden Grössen h_{23}, h_{24}, .., h_{2n} durch die Summen

$$h_{13}+h_{23},\quad h_{14}+h_{24},\ldots,\quad h_{1n}+h_{2n}$$

ersetzt. Bezeichnet man die so transformirte Determinante durch

$$[\overline{1+2}, 3, \ldots, n]$$

so ist der Theil von $[0, 1, \ldots, n]$, welcher je 2 von den Grössen h_{01}, h_{02}, .. enthält,

$$h_{01}\,h_{02}[\overline{1+2}, 3, 4, \ldots, n] + h_{01}h_{03}[\overline{1+3}, 2, 4, \ldots, n] + \ldots$$

Auf analoge Weise wird der Theil von $[0, 1, \ldots, n]$, welcher je 3 von jenen Grössen enthält, durch

$$h_{01}h_{02}h_{03}[\overline{1+2+3}, 4, 5, \ldots] + h_{01}h_{02}h_{04}[\overline{1+2+4}, 3, 5, \ldots] + \ldots$$

ausgedrückt, indem man $[\overline{1+2+3}, 4, 5, \ldots]$ aus $[3, 4, ,5 \ldots]$ dadurch ableitet, dass man die in der Diagonale stehenden Grössen h_{34}, h_{35}, .. durch die Summen

$$h_{14}+h_{24}+h_{34},\qquad h_{15}+h_{25}+h_{35},\ldots$$

ersetzt. U. s. w. So entsteht die Recursionsregel

$$\begin{aligned}[0, 1, \ldots, n] = \Sigma h_{01}[1, 2, \ldots] &+ \Sigma h_{01}h_{02}[\overline{1+2}, 3, \ldots] \\ &+ \Sigma h_{01}h_{02}h_{03}[\overline{1+2+3}, 4, \ldots] + \ldots \\ &+ h_{01}h_{02}\ldots h_{0n}\end{aligned}$$

Zufolge derselben ist

$$
\begin{aligned}
[0, 1] &= h_{01} \\
[0, 1, 2] &= \Sigma h_{01}[1, 2] + h_{01} h_{02} \\
&= h_{01} h_{12} + h_{02} h_{12} + h_{01} h_{02} \\
[0, 1, 2, 3] &= \Sigma h_{01}[1, 2, 3] + \Sigma h_{01} h_{02}[\overline{1+2}, 3] + h_{01} h_{02} h_{03} \\
&= (h_{01} + h_{02} + h_3)[1, 2, 3] + h_{01} h_{02}[\overline{1+2}, 3] \\
&\quad + h_{01} h_{03}[\overline{1+3}, 2] + h_{02} h_{03}[\overline{2+3}, 1] + h_{01} h_{02} h_{03}
\end{aligned}
$$

Die Formel $[\overline{1, 2}, 3]$ hat 3 Glieder, die Formel $[\overline{1+2}, 3]$ hat deren 2, also hat $[0, 1, 2, 3]$ deren 4^2. Ebenso erkennt man, dass die Formel

$$[\overline{1 + 2 + .. + k}, k + 1, k + 2, k + 3]$$

$3^2 k + 3 . 2 k^2 + k^3 = k(k + 3)^2$ Glieder hat. Unter der Annahme, dass für die Werthe von m, welche eine bestimmte Grenze nicht übersteigen, die Formel

$$[\overline{1 + 2 + .. + k}, k + 1, .., k + m]$$

$k(k + m)^{m-1}$ Glieder besitzt, findet man vermöge der Recursionsregel für

$$[\overline{1 + 2 + .. + k}, k + 1, .., k + m + 1]$$

die Anzahl der Glieder

$$
\begin{aligned}
&k(m+1)(1+m)^{m-1} + k^2 \binom{m+1}{2} . 2(2+m-1)^{m-2} + k^3 \binom{m+1}{3} . 3(3+m-2)^{m-3} + .. \\
&= k(m+1)^m + k^2 m (m+1)^{m-1} + k^3 \binom{m}{2} (m+1)^{m-2} + .. \\
&= k(k+m+1)^m
\end{aligned}
$$

Demnach ist die bis zu $m = 3$ gültige Annahme unbeschränkt richtig.

19. Wenn durch f eine Function $n$ten Grades von x, durch f' ihr Differentialcoefficient bezeichnet wird, so ist die oben (6) definirte Determinante von f' und f

$$
a_n^{n-1} f'(\alpha_1) .. f'(\alpha_n) = \begin{vmatrix}
a_1 & 2a_2 & 3a_3 & . & . \\
 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & . \\
 & & . & . & . \\
a_0 & a_1 & a_2 & . & . \\
 & a_0 & a_1 & a_2 & . \\
 & & . & . & .
\end{vmatrix}
$$

Das System hat n Zeilen der ersten Art und $n-1$ Zeilen der zweiten Art. Subtrahirt man die mit n multiplicirte letzte Zeile von der $n$ten, so erhält die $n$te Zeile folgende Elemente

$$0, \ldots, 0, \quad -na_0, \quad -(n-1)a_1, \ldots, \quad -a_{n-1}, \quad 0$$

und die Resultante reducirt sich (§. 3, 3) auf das Product von a_n mit einer Determinante $(2n-2)$ten Grades, welche durch $\varDelta$ bezeichnet wird. Nach §. 10, 7 ist

$$\varDelta = a_n{}^{n-2} f'(\alpha_1) \ldots f'(\alpha_n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_n{}^{2n-2} \varDelta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2$$

eine symmetrische ganze Function der Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (vergl. §. 10, 7) und eine homogene ganze Function der Coefficienten $a_0, \ldots, a_n$ von $2n-2$ Dimensionen, welche die **Discriminante der ganzen Function** $f(x)$ **und der Gleichung** $f(x) = 0$ genannt wird*). Wenn a_n verschwindet, so wird eine der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ unendlich gross; dabei verschwindet die Discriminante im Allgemeinen nicht, sondern wird zur Discriminante einer Function $(n-1)$ten Grades.

Die Discriminante des Products fg (abgesehn vom Zeichen) erscheint hiernach (6) als das Product der Discriminanten von f und g multiplicirt mit dem Quadrat der Resultante von f und g. Wenn $\varDelta$ die Discriminante von f ist, so findet man z. B. für $(x-t)f$ die Discriminante $\varDelta f(t)^2$.

20. Wenn die Discriminante von f nicht verschwindet, so haben f und f' keinen gemeinschaftlichen Divisor (5) und die Wurzeln der Gleichung $f = 0$ sind sämmtlich von einander verschieden.

Wenn die Discriminante von f verschwindet, so haben f und f' einen gemeinschaftlichen Divisor und die Wurzeln der Gleichung $f = 0$ sind nicht alle von einander verschieden. Der

*) Gauss Demonstr. nova altera 6 (Comm. Gott. Vol. 3) hatte dieser Formel den Namen »Determinante der Function $f(x)$ oder der Gleichung $f(x) = 0$« beigelegt. Vergl. Joachimsthal Crelle J. 33 p. 371. Jacobi Crelle J. 40 p. 244. Bei dem jetzigen Sprachgebrauch ist der von Sylvester (Philos. Mag. 1851, II p. 406) gebildete Name »Discriminante« bezeichnender.

gemeinschaftliche Divisor theilt auch die Function $pf + qxf'$, welche aus der gegebenen Function dadurch abgeleitet wird, dass man ihre Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ der Reihe nach mit den Gliedern einer beliebigen arithmetischen Progression p, $p+q$, $p+2q, \ldots$ multiplicirt, und welche vor Erfindung der Differentialrechnung von Hudde 1657*) zur Bestimmung mehrfacher Wurzeln der Gleichung $f = 0$ gebildet worden ist.

Wenn f und f' den gemeinschaftlichen Divisor t^k haben, und die Discriminante von t nicht null ist, so ist f durch t^{k+1} theilbar. Es sei z. B.

$$f(x) = t^k u$$

$$f' = t^k u' + kt^{k-1}t'u = t^k\left(u' + k\frac{t'u}{t}\right)$$

Da nun t' und t einen gemeinschaftlichen Divisor nicht haben, so ist u durch t, also $f(x)$ durch t^{k+1} theilbar.

21. Die ganze Function $f(x)$ kann als ein besonderer Werth der binären Form d. h. der homogenen ganzen Function von 2 Variablen y, x desselben Grades

$$u = A_0 y^n + \binom{n}{1} A_1 y^{n-1} x + \binom{n}{2} A_2 y^{n-2} x^2 + \ldots + A_n x^n$$

angesehn werden**), welche durch Composition der Glieder von $(y+x)^n$ mit den Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ entsteht, und eine $n$te Potenz in dem Falle wird, dass $A_0, A_1, \ldots, A_n$ eine geometrische Progression bilden.

Nach der Fundamentaleigenschaft der homogenen Functionen hat man die Identität

$$nu = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$$

Der gemeinschaftliche Divisor von u und $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x}$ ist also auch ein

---

*) Hudde Epist. I. Reg. 10 in Schooten's Ausgabe von Descartes' Geometrie.

**) Dieses wichtige Hülfsmittel der Analysis ist von Newton Arithm. univ. Inventio divisorum p. 43, Plücker System d. anal. Geom. §. 1, 7, Hesse Crelle J. 28 p. 102, Joachimsthal Crelle J. 33 p. 373, Jacobi Crelle J. 40 p. 247 und Andern, zu dem gegenwärtigen Zweck von Salmon higher plane curves 1852 p. 296 angewendet worden.

Divisor von $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial y}$. Die unter der Voraussetzung $y = 1$ gebildete Resultante von $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial y}$ ist wie die Discriminante von $f(x)$ eine homogene ganze Function der Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ von $2n-2$ Dimensionen und verschwindet zugleich mit der Discriminante von $f(x)$. Daher hat jene Resultante zu dieser Discriminante ein von den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots$ unabhängiges Verhältniss.

In der That, wenn man in der Determinante A (19) jede der letzten $n-2$ Zeilen mit n multiplicirt, und von ihnen der Reihe nach die 2te, 3te, .. Zeile des Systems subtrahirt, so findet man nach Umstellung der $n$ten Zeile

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \cdot & \cdot \\ & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & \cdot & \cdot \\ & na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

d. i. die Resultante von $f'(x)$ und $nf(x) - xf'(x)$.

Beispiele. Die Discriminante der Function 2ten Grades

$$a_0 + 2a_1x + a_2x^2$$

ist die Resultante von $a_1 + a_2x$ und $a_0 + a_1x$, nämlich

$$a_1^2 - a_0a_2$$

Die Discriminante von $a_0 + 3a_1x + 3a_2x^2 + a_3x^3$ ist die Resultante von

$$a_1 + 2a_2x + a_3x^2$$
$$a_0 + 2a_1x + a_2x^2$$

nämlich in der verkürzten Gestalt (14)

$$-\begin{vmatrix} 2(a_1^2 - a_0a_2) & a_1a_2 - a_0a_3 \\ a_1a_2 - a_0a_3 & 2(a_2^2 - a_1a_3) \end{vmatrix}.$$

Ebenso findet man die Discriminante von

$$a_0 + 4a_1x + 6a_2x^2 + 4a_1x^3 + a_4x^4$$

$$- \begin{vmatrix} 3(a_1^2 - a_0 a_2) & 3(a_1 a_2 - a_0 a_3) & a_1 a_3 - a_0 a_4 \\ 3(a_1 a_2 - a_0 a_3) & 9 a_2^2 - 8 a_1 a_3 - a_0 a_4 & 3(a_2 a_3 - a_1 a_4) \\ a_1 a_3 - a_0 a_4 & 3(a_2 a_3 - a_1 a_4) & 3(a_3^2 - a_2 a_4) \end{vmatrix}$$

22. Das in der Discriminante von $f(x)$ enthaltene Product aller positiven und negativen Differenzen zwischen den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ der Gleichung $f(x) = 0$ ist der Quotient des bekannten Gliedes durch den Coefficienten des höchsten Gliedes in der Gleichung, deren Wurzeln jene Differenzen sind*).

Um diese Gleichung zu bilden, bemerke man, dass dem System

$$f(x) = 0, \qquad f(x+y) = 0$$

genügt wird, indem man für x und $x+y$ alle Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, mithin für y alle Differenzen der Wurzeln, unter denen n verschwinden, und für x den jedesmaligen Subtrahenden setzt. Dabei verschwindet die Resultante R der beiden durch $f(x)$ und $f(x+y)$ bezeichneten Functionen von x (8). Also ist R durch y^n theilbar, und $R : y^n = 0$ die Gleichung, deren Wurzeln die Differenzen zwischen jeder der Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und den übrigen Grössen dieser Reihe sind. Diese Differenzen sind aber paarweise entgegengesetzt gleich, also kommen in $R : y^n$ nur gerade Potenzen von y vor.

Unmittelbar findet man die von den verschwindenden Wurzeln befreite Gleichung, indem man**) von dem System

$$(1) \qquad f(u+v) = 0, \qquad f(u-v) = 0$$

ausgeht, welchem durch die Werthe

$$2u = \alpha_i + \alpha_k, \qquad 2v = \alpha_i - \alpha_k$$

*) Diese unter dem Namen »équation aux carrés des différences« bekannte Gleichung ist von Waring Misc. analyt. 1762 p. 17 mit Hülfe von symmetrischen Functionen der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ construirt und zur Untersuchung der Wurzeln einer gegebenen Gleichung gebraucht worden. Besondere Ausführungen für die Gleichungen 4ten und 5ten Grades hat Waring in den Philos. Transact. 1763 p. 294 mitgetheilt. Die Ableitung der erwähnten Gleichung durch Elimination wurde von Euler Calc. diff. II, §. 244 gezeigt, und ausführlich von Lagrange (Mém. de Berlin 1767 p. 311 art. 8. Résolution des équat. art. 8 und Note 3) behandelt.

**) Nach Borchardt's Angabe.

genügt wird. Dieselben Auflösungen hat das System

$$\text{(II)} \qquad \frac{f(u+v)+f(u-v)}{2} = 0, \qquad \frac{f(u+v)-f(u-v)}{2} = 0$$

dessen erste Gleichung nur gerade, und dessen zweite Gleichung nur ungerade Potenzen von v enthält. Weil $f(u+v)-f(u-v)$ durch v theilbar ist, so umfasst das System (II) die beiden Systeme

$$\text{(III)} \qquad \frac{f(u+v)+f(u-v)}{2} = 0, \qquad v = 0$$

und

$$\text{(IV)} \qquad \frac{f(u+v)+f(u-v)}{2} = 0, \qquad \frac{f(u+v)-f(u-v)}{2v} = 0$$

Dem System (IV) wird durch die Werthe

$$2u = \alpha_i + \alpha_k, \qquad 2v = \alpha_i - \alpha_k$$

unter der Beschränkung genügt, dass i und k verschiedene Zahlen der Reihe 1, 2, .., n bedeuten. Bildet man nun die Resultanten $\psi(v^2)$ und $\chi(u)$ der Functionen

$$\frac{f(u+v)+f(u-v)}{2} \quad \text{und} \quad \frac{f(u+v)-f(u-v)}{2v}$$

jene in Bezug auf die Variable u, diese in Bezug auf v^2, so ist

$$\psi(v^2) = 0, \qquad \text{wenn } v^2 = \frac{1}{4}(\alpha_i - \alpha_k)^2$$

$$\chi(u) = 0, \qquad \text{wenn } u = \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_k)$$

§. 12. Die Functionaldeterminanten.

1. Wenn $y_1, .., y_n$ Functionen der Variablen $x_1, .., x_n$ sind, so sind deren erste Differentiale

$$dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + .. + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} dx_n$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$dy_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_1} dx_1 + .. + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} dx_n$$

lineare Formen der $dx_1, .., dx_n$. Die Determinante der Diffe-

rentiale $dy_1, .., dy_n$ (§. 8, 1) ist $\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$, die Determinante eines Quadrats, dessen Zeilen die ersten Fluxionen (die partialen Differentialcoefficienten erster Ordnung) der gegebenen Functionen enthalten. Sie heisst die Functionaldeterminante*) d. i. Fluxionendeterminante der Functionen $y_1, .., y_n$ nach den Variablen $x_1, .., x_n$ (»JACOBIAN« SYLVESTER Philos. Trans. 1853 t. 143 p. 476, CAYLEY Crelle J. 52 p. 276), und wird nach DONKIN Philos. Trans. 1854, I p. 72 wie eine Fluxion bezeichnet

$$\frac{\partial(y_1, .., y_n)}{\partial(x_1, .., x_n)}$$

z. B. $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$, $u' = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$,

$$\frac{1}{4}\frac{\partial(u, u')}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} ax + by & bx + cy \\ a'x + b'y & b'x + c'y \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\begin{vmatrix} u & bx + cy \\ u' & b'x + c'y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y^2 & -yx & x^2 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

Die Subdeterminanten sind ebenfalls Functionaldeterminanten. Wenn man m Zeilen $a, b, ..,$ und darin m Colonnen α, $\beta, ..$ auswählt, so ist die Determinante $m$ten Grades dieser m^2 Elemente die Functionaldeterminante der Functionen $y_a, y_b, ..$ nach den Variablen $x_\alpha, x_\beta, ..$

$$\frac{\partial(y_a, y_b, ..)}{\partial(x_\alpha, x_\beta, ..)}$$

Wenn die Functionaldeterminante nicht bei allen x null ist, so können die Differentiale dx durch die Differentiale dy ausgedrückt werden. Aus dem angegebenen linearen System findet man

$$\Delta dx_k = \Delta_{1k} dy_1 + .. + \Delta_{nk} dy_n$$

indem man durch Δ die Functionaldeterminante, durch Δ_{ik} die

---

*) JACOBI de determ. functionalibus (Crelle J. 22 p. 319) §. 5. Vorlesungen über Dynamik p. 100. Mehrere unter den hierher gehörigen Sätzen hatte JACOBI in früheren Abhandlungen, namentlich 1833 Crelle J. 12 p. 38 ff. gegeben.

Adjuncte von $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ bezeichnet. Wenn aber bei allen x die Functionaldeterminante null ist, so sind die Differentiale $dy_1, \ldots, dy_n$ durch eine oder mehr homogene lineare Gleichungen verbunden, deren Coefficienten Subdeterminanten des Systems der Fluxionen sind.

2. I. Wenn 2 unter den n Functionen $y_1, \ldots, y_n$ z. B. y_a, y_b nicht unabhängig von einander sind, sondern durch eine Gleichung $\varphi(y_a, y_b) = 0$ verbunden, so ist die Functionaldeterminante der y_a, y_b nach je 2 Variablen z. B. x_α, x_β null. Denn man hat

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_a}\frac{\partial y_a}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_b}\frac{\partial y_b}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_a}\frac{\partial y_a}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_b}\frac{\partial y_b}{\partial x_\beta} = 0$$

Nun sind die Fluxionen von φ nach y_a, y_b nicht null, folglich ist $\frac{\partial(y_a, y_b)}{\partial(x_\alpha, x_\beta)} = 0$. Und wenn eine dieser Functionaldeterminanten nicht null ist, so sind die beiden Functionen unabhängig von einander.

Wenn m unter den n Functionen nicht unabhängig von einander sind, so ist die Functionaldeterminante derselben nach je m Variablen null. Und wenn eine dieser Functionaldeterminanten $m$ten Grades nicht null ist, so sind die m Functionen unabhängig von einander.

Wenn die n Functionen nicht unabhängig von einander sind, so ist ihre Functionaldeterminante nach den n Variablen null. Und wenn diese Functionaldeterminante $n$ten Grades nicht null ist, so sind die n Functionen unabhängig von einander*).

II. Wenn n Grössen y gegebene Functionen von ebensoviel Grössen x sind, so fordert das Reversions-Problem, auch die Grössen x als Functionen der y darzustellen. Jacobi det. funct. §. 4. Kronecker Crelle J. 72 p. 156. Lipschitz Analysis II, §. 101 ff.

---

*) Jacobi det. funct. §. 6.

Wenn die Functionaldeterminante Δ der Functionen $y_1, .., y_n$ nach den Variablen $x_1, .., x_n$ nicht null ist, so sind die Functionen unabhängig von einander (I), und nach vollbrachter Reversion hat man (1)

$$\Delta dx_k = \Delta_{1k} dy_1 + .. + \Delta_{nk} dy_n$$

$$\text{d. h.} \quad \Delta \frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \Delta_{ik}$$

III. Es seien $y_1, .., y_m$ gegebene Functionen der Variablen $x_1, .., x_n$, und n nicht weniger als m. Wenn die Functionaldeterminante der $y_1, .., y_{m-1}$ nach einer Combination von $m-1$ Variablen z. B. nach $x_1, .., x_{m-1}$ nicht null ist, und wenn die Functionaldeterminante der $y_1, .., y_m$ nach je m Variablen null ist bei allen x, so ist y_m durch $y_1, .., y_{m-1}$ ausdrückbar*).

Beweis. Nach der ersten Voraussetzung ist $\frac{\partial(y_1, .., y_{m-1})}{\partial(x_1, .., x_{m-1})}$ nicht null. Daher ist auch

$$\frac{\partial(y_1, .., y_{m-1}, z_m)}{\partial(x_1, .., x_{m-1}, x_m)}$$

nicht null, wenn für z_m eine Function der $x_m, .., x_n$ gewählt wird, deren Fluxion nach x_m nicht null ist. Ebenso ist unter ähnlichen Bedingungen für $z_{m+1}, z_{m+2}, ..$

$$\Delta = \frac{\partial(y_1, .., y_{m-1}, z_m, .., z_n)}{\partial(x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n)}$$

nicht null. Durch Entwickelung dieser Determinante nach der Zeile $r = m, m+1, ..$ erhält man

$$\frac{\partial z_r}{\partial x_1} \Delta_{r1} + .. + \frac{\partial z_r}{\partial x_n} \Delta_{rn} = \Delta$$

Wenn man aber z_r durch y_m ersetzt, so ist die Determinante null, weil die Subdeterminanten von m Zeilen null sind nach der zweiten Voraussetzung. Also hat man

---

*) Jacobi det. funct. §. 7. Kronecker Crelle J. 72 p. 155.

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_1}\Delta_{r1} + \ldots + \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\Delta_{rn} = 0$$

Die Functionen $y_1, \ldots, y_{m-1}, z_m, \ldots, z_n$ sind unabhängig von einander. Nach vollbrachter Reversion sind $x_1, \ldots, x_n$ gegebene Functionen der $y_1, \ldots, y_{m-1}, z_m, \ldots, z_n$, und dabei (II)

$$\Delta \frac{\partial x_k}{\partial z_r} = \Delta_{rk}$$

Also ist y_m eine Function der $y_1, \ldots, y_{m-1}, z_m, \ldots, z_n$, der Art, dass

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial z_r} + \ldots + \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial z_r} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial y_m}{\partial z_r} = 0$$

mithin durch $y_1, \ldots, y_{m-1}$ ausdrückbar ohne $z_m, \ldots, z_n$.

Wenn insbesondere die Functionaldeterminante von n Functionen y nach den n Variablen x bei allen x null ist, so sind die Functionen nicht unabhängig von einander.

3. Wenn die Grössen y explicite gegebene Functionen der Grössen x sind, so kann y_i in Bezug auf x_k differentiirt, also auch die Functionaldeterminante unmittelbar gebildet werden.

Wenn insbesondere y_2 die Variable x_1 nicht enthält, wenn y_3 die Variablen x_1, x_2 nicht enthält, wenn überhaupt y_i die Variablen $x_1, \ldots, x_{i-1}$ nicht enthält, so erscheint die Functionaldeterminante in Form eines Products, weil von ihr nur das Anfangsglied übrig bleibt (§. 3, 3).

Wenn die Grössen y gebrochene Functionen mit demselben Nenner sind, z. B.*)

$$y_i = \frac{u_i}{u}$$

so ist $u^2 \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = u\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - u_i \frac{\partial u}{\partial x_k}$, folglich

---

*) Jacobi Crelle J. 12 p. 40.

$$u^{2n+1}\,\Sigma\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial y_n}{\partial x_n}=\begin{vmatrix} u & u\frac{\partial u}{\partial x_1}-u\frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & u\frac{\partial u}{\partial x_n}-u\frac{\partial u}{\partial x_n} \\ u_1 & u\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-u_1\frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & u\frac{\partial u_1}{\partial x_n}-u_1\frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\;\cdot \\ u_n & u\frac{\partial u_n}{\partial x_1}-u_n\frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & u\frac{\partial u_n}{\partial x_n}-u_n\frac{\partial u}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$\Sigma\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial y_n}{\partial x_n}=\frac{1}{u^{n+1}}\begin{vmatrix} u & \frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ u_1 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ u_n & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Durch die Substitution $u=\frac{v}{t}$, $u_i=\frac{v_i}{i}$ findet man ebenso

$$\begin{vmatrix} u & \frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ u_1 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ u_n & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}=\frac{1}{t^{n+1}}\begin{vmatrix} v & \frac{\partial v}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial v}{\partial x_n} \\ v_1 & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ v_n & \frac{\partial v_n}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

unabhängig von den Fluxionen der Function t.

4. Wenn die Grössen y implicite gegebene Functionen der Grössen x sind zufolge des Systems von n Gleichungen

$$F_1(y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_n)=0,\ldots,F_n(y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_n)=0$$

so ist*)

$$\Sigma\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial y_n}{\partial x_n}=(-1)^n\frac{\Sigma\pm\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x_n}}{\Sigma\pm\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial y_n}}$$

---

*) Jacobi det. funct. §. 10 und 18.

Beweis. Zufolge der Voraussetzungen hat man

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n} dy_n + \frac{\partial F_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$dy_r = \frac{\partial y_r}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial y_r}{\partial x_n} dx_n$$

Wenn nun unter den Variablen x nur x_k sich ändert, so ist

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0$$

$$-\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}$$

folglich (§. 6, 1)

$$(-1)^n \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_k}$$

Anmerkung. Wenn die Grössen $F_1, F_2, \ldots$ so beschaffen sind, dass F_i die Variablen $x_1, \ldots, x_{i-1}$ nicht enthält, so ist

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

das Product der in der Diagonale stehenden Elemente (2).

Wenn die Grössen $F_1, F_2, \ldots$ so beschaffen sind, dass

$$F_i = -y_i + f_i(x_1, \ldots, x_n)$$

so ist

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial y_n} = (-1)^n$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

Und wenn man aus dem gegebenen System $F_1 = 0, \ldots, F_n = 0$ das System

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots) \\ y_2 &= \varphi_2(y_1, x_2, \ldots) \\ y_3 &= \varphi_3(y_1, y_2, x_3, \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

abgeleitet hätte, so erhielte man die Functionaldeterminante der Grössen y in Bezug auf die Variablen x in Form des Products

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}.$$

In der That ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & . \\ 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & . \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

das Product der Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . \\ -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & 1 & 0 & . \\ -\frac{\partial \varphi_3}{\partial y_1} & -\frac{\partial \varphi_3}{\partial y_2} & 1 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & . \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & . \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

zufolge der Identität

$$-\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} - \cdot\cdot - \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_{i-1}}\frac{\partial y_{i-1}}{\partial x_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$$

5. Wenn $n > m$ und zufolge des Systems von n Gleichungen

$$F_1(y_1, .., y_n, x_1, .., x_m) = 0, .., \quad F_n(y_1, .., y_n, x_1, .., x_m) = 0$$

die Grössen y implicite gegebene Functionen der Grössen x sind, so ist*)

$$\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_m} = (-1)^m \frac{\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial F_m}{\partial x_m}\frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_{m+1}} \cdot\cdot \frac{\partial F_n}{\partial y_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot\cdot \frac{\partial F_n}{\partial y_n}}$$

*) Jacobi det. funct. §. 13.

Beweis. Die Determinante

$$(-1)^m \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m+1}} & \cdot\cdot & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_{m+1}} & \cdot\cdot & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

ist das Product der Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} & \frac{\partial y_1}{\partial y_{m+1}} & \cdot\cdot & \frac{\partial y_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} & \frac{\partial y_n}{\partial y_{m+1}} & \cdot\cdot & \frac{\partial y_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

weil nach (3) bei $k = 1, 2, .., m$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + .. + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$$

und bei $k = m+1, .., n$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y_k} + .. + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial y_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_k}$$

Der zweite Factor ist von $\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} .. \frac{\partial y_m}{\partial x_m}$ nicht verschieden (§. 3, 3).

Insbesondere ist bei $m = 1$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial F_2}{\partial y_2} .. \frac{\partial F_n}{\partial y_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1} .. \frac{\partial F_n}{\partial y_n}}$$

6. I. Wenn $z_1, .., z_m$ gegebene Functionen der Grössen $y_1, .., y_n$, und diese wiederum gegebene Functionen der Grössen $x_1, .., x_m$ sind und hiernach

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \frac{\partial z_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + .. + \frac{\partial z_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}$$

ist, so findet man (§. 6, 1) die Functionaldeterminante der Grössen z nach den Grössen x*)

$$\Sigma \pm \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial z_m}{\partial x_m} = \sum_{tuv..}\left(\Sigma \pm \frac{\partial z_1}{\partial y_t}\frac{\partial z_2}{\partial y_u}\frac{\partial z_3}{\partial y_v} \cdot\cdot \Sigma \pm \frac{\partial y_t}{\partial x_1}\frac{\partial y_u}{\partial x_2}\frac{\partial y_v}{\partial x_3}\right)$$

eine Summe, deren Glieder dadurch gebildet werden, dass man für $tuv\,..$ alle Combinationen von je m verschiedenen Nummern der Reihe 1 bis n setzt. Bei $m = n$ ist

$$\Sigma \pm \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial z_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \cdot\cdot \frac{\partial z_n}{\partial y_n} \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$$

$$\frac{\partial(z_1, .., z_n)}{\partial(x_1, .., x_n)} = \frac{\partial(z_1, .., z_n)}{\partial(y_1, .., y_n)}\frac{\partial(y_1, .., y_n)}{\partial(x_1, .., x_n)}$$

Unter der Voraussetzung $m > n$ ist die Functionaldeterminante null bei allen x.

II. Wenn $y_1, .., y_n$ von einander unabhängige Functionen der $x_1, .., x_n$ sind dergestalt, dass $x_1, .., x_n$ durch $y_1, .., y_n$ ausgedrückt werden können, so findet man durch Verfügung über $z_1, .., z_n$

$$\frac{\partial(x_1, .., x_n)}{\partial(y_1, .., y_n)}\frac{\partial(y_1, .., y_n)}{\partial(x_1, .., x_n)} = \frac{\partial(x_1, .., x_n)}{\partial(x_1, .., x_n)}$$

$$\frac{\partial(x_1, .., x_m, y_{m+1}, .., y_n)}{\partial(y_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , y_n)}\frac{\partial(y_1, .., y_n)}{\partial(x_1, .., x_n)} = \frac{\partial(x_1, .., x_m, y_{m+1}, .., y_n)}{\partial(x_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , x_n)}$$

Die Fluxionen von x_1 nach $x_1, x_2, ..$ sind 1, 0, .., u. s. w., folglich**)

$$\frac{\partial(x_1, .., x_n)}{\partial(y_1, .., y_n)}\frac{\partial(y_1, .., y_n)}{\partial(x_1, .., x_n)} = 1$$

$$\frac{\partial(x_1, .., x_m)}{\partial(y_1, .., y_m)}\frac{\partial(y_1, .., y_n)}{\partial(x_1, .., x_n)} = \frac{\partial(y_{m+1}, .., y_n)}{\partial(x_{m+1}, .., x_n)}$$

7. Wenn die Functionen $f_1, .., f_n$ die ersten Fluxionen einer gegebenen Function f sind, d. h.

$$df = f_1 dx_1 + .. + f_n dx_n, \qquad df_i = f_{i1} dx_1 + .. + f_{in} dx_n$$

---

*) Jacobi det. funct. §. 11.

**) Jacobi det. funct. §. 8 und 9. Das erste Theorem hatte Möbius Crelle J. 12 p. 116 gefunden.

so ist ihre Functionaldeterminante die Determinante der zweiten Fluxionen $\Sigma \pm f_{11} \ldots f_{nn}$ (HESSE's »Determinante der Function« 1844 Crelle J. 28 p. 83, »Hessian« SYLVESTER Cambr. and Dublin math. J. 6 p. 186). Die Determinante einer quadratischen Form f ist von der Functionaldeterminante ihrer halben ersten Fluxionen nicht verschieden.

Wenn die Fluxionen $f_1, \ldots, f_n$ durch eine Gleichung verbunden sind, so ist die Functionaldeterminante derselben, die Determinante der Function f, null bei allen x (2). Wenn insbesondere $f_1, \ldots, f_n$ durch eine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0$$

verbunden sind, so geht die Function f durch die lineare Substitution

$$x_1 = y_1 + c_1 y_n, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1} + c_{n-1} y_n$$
$$x_n = c_n y_n$$

in eine Function der $n-1$ Variablen $y_1, \ldots, y_{n-1}$ über, weil

$$\frac{\partial f}{\partial y_n} = f_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_n} + \ldots + f_n \frac{\partial x_n}{\partial y_n} = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n = 0 \text{*)}.$$

8. Wenn die Function $F(y_1, \ldots, y_n)$ nach Einführung der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, von welchen $y_1, \ldots, y_n$ in gegebener Weise abhängen, durch $G(x_1, \ldots, x_n)$ ausgedrückt wird, so wird das zwischen bestimmten endlichen Grenzen genommene $n$fache Integral $J = \int F(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n$ durch

*) HESSE Crelle J. 42 p. 122. Die Umkehrung, dass von einer beliebigen Form f mit identisch verschwindender Determinante die Fluxionen $f_1, \ldots, f_n$ durch eine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten verbunden seien, hat HESSE a. a. O. und (infolge meiner Bedenken, die ich Herrn BORCHARDT mitgetheilt hatte) 56 p. 263 zu beweisen gesucht. Bei quadratischen Formen und bei beliebigen binären Formen ist diese Umkehrung zulässig. Bei cubischen Formen von 3 und 4 Variablen ist der Nachweis der Umkehrung gegeben worden von PASCH 1874 Crelle J. 80 p. 169; überhaupt bei Formen von 4 Variablen von GORDAN und NÖTHER Bericht der Erlanger Societät 1875 Dec. Dass bei Formen dritten und höhern Grades von 5 Variablen die Umkehrung unzulässig ist, hat GORDAN bemerkt. Math. Ann. 10 p. 547.

$$\int G(x_1, .., x_n)\, \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} dx_1 \ldots dx_n$$

ausgedrückt. Dabei wird vorausgesetzt, dass jedem System von Werthen der y ein System von Werthen der x eindeutig entspricht und dass die Grenzen der Integrationen in Bezug auf die x entsprechend den gegebenen Grenzen der Integrationen in Bezug auf die y gezogen werden*).

Beweis. Die Reihenfolge der Integrationen ist beliebig. Wenn man mit der Integration in Bezug auf y_n beginnt, und

$$y_n = \varphi_n(y_1, .., y_{n-1}, x_n)$$

setzt, so hat man dy_n durch $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dx_n$ zu ersetzen, weil $y_1, .., y_{n-1}$ unverändert bleiben, und findet

$$J = \int F(y_1, .., y_{n-1}, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dy_1 \ldots dy_{n-1} dx_n$$

Wenn man die Entwickelung dieses Integrals mit der Integration in Bezug auf y_{n-1} beginnt und

$$y_{n-1} = \varphi_{n-1}(y_1, .., y_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$$

setzt, so hat man dy_{n-1} durch $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} dx_{n-1}$ zu ersetzen, weil $y_1, .., y_{n-2}, x_n$ unverändert bleiben, und findet

$$J = \int F(y_1, .., y_{n-2}, \varphi_{n-1}, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dy_1 \ldots dy_{n-2} dx_{n-1} dx_n$$

Indem man so fortfährt, erhält man endlich

$$J = \int F(\varphi_1, .., \varphi_n) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dx_1 \ldots dx_n$$

---

*) Die Transformation eines zweifachen Integrals (integrale duplicatum) ist zuerst von Euler 1759 Nov. Comm. Petrop. 14, I p. 72 (Calc. integr. IV p. 416) gezeigt worden. Bald darauf hat Lagrange Mém. de l'Acad. de Berlin 1773 p. 125 die Transformation eines dreifachen Integrals ausgeführt. Der allgemeine Ausdruck des transformirten vielfachen Integrals rührt von Jacobi her (Crelle J. 12 p. 38, det. funct. §. 19). Denselben Ausdruck hat später Catalan gefunden. Mém. cour. p. l'acad. de Bruxelles t. 14 (1840). Vergl. Bull. de l'acad. de Belgique t. 13, 6.

Das Product der hinzutretenden Differentialcoefficienten ist der Functionaldeterminante der Grössen y in Bezug auf die Grössen x gleich (4).

9. Zu derselben Regel gelangt man unmittelbar durch Verfolgung des Weges, den Lagrange (l. c.) bei der Transformation eines dreifachen Integrals eingeschlagen hat*).

Wenn $f_1, f_2, .., f_n$ Functionen der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ sind, und durch f_{ik} der Differentialcoefficient von f_i in Bezug auf x_k bezeichnet wird, so besteht das System von linearen Gleichungen

$$df_1 = f_{11}dx_1 + .. + f_{1n}dx_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$df_n = f_{n1}dx_1 + .. + f_{nn}dx_n$$

Durch Auflösung desselben erhält man (1)

$$\Delta_{1k}df_1 + .. + \Delta_{nk}df_n = R_n dx_k$$

wenn $R_n = \Sigma \pm f_{11} .. f_{nn}$ und Δ_{ik} die Adjuncte von f_{ik} in R_n bedeutet, so dass insbesondere $\Delta_{nn} = R_{n-1}$ ist. Es sei nun U eine gegebene Function von $f_1, .., f_n$ und

$$\int U df_1 df_2 .. df_n$$

das zu berechnende vielfache Integral.

Wenn man die Reihe der auszuführenden Integrationen mit der Integration in Bezug auf f_n eröffnet, so hat man die Summe der Differentiale $U df_n$ unter der Bedingung zu suchen, dass f_1, $f_2, .., f_{n-1}$ unverändert bleiben. Unter dieser Bedingung ist in dem obigen System von linearen Gleichungen

$$df_1 = 0, \quad df_2 = 0, .., df_{n-1} = 0$$

folglich

$$R_{n-1}df_n = R_n dx_n$$

so dass man df_n durch $\frac{R_n}{R_{n-1}}dx_n$ ersetzen kann. Folglich ist

$$\int U df_1 .. df_n = \int U \frac{R_n}{R_{n-1}} df_1 .. df_{n-1} dx_n$$

*) Vergl. Catalan l. c. Moigno Leçons II p. 223.

wenn die Grenzen von x_n nach den gegebenen Grenzen von f_n bestimmt werden. Indem man die Entwickelung des so transformirten Integrals mit der Integration in Bezug auf die Variable f_{n-1} beginnt, hat man die Summe der Differentiale $U \frac{R_n}{R_{n-1}} df_{n-1}$ zu suchen, während $f_1, f_2, .., f_{n-2}, x_n$ unverändert bleiben. Unter dieser Voraussetzung hat man aber

$$df_1 = 0, .., df_{n-2} = 0, \; dx_n = 0$$

mithin folgendes System von $n-1$ linearen Gleichungen

$$\begin{array}{lll} 0 & = f_{11} \quad dx_1 + .. + f_{1,n-1} \quad dx_{n-1} \\ . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ 0 & = f_{n-2,1} dx_1 + .. + f_{n-2,n-1} dx_{n-1} \\ df_{n-1} & = f_{n-1,1} dx_1 + .. + f_{n-1,n-1} dx_{n-1} \end{array}$$

Hieraus ergiebt sich wie oben

$$R_{n-2} df_{n-1} = R_{n-1} dx_{n-1}$$

so dass man df_{n-1} durch $\frac{R_{n-1}}{R_{n-2}} dx_{n-1}$ und $U \frac{R_n}{R_{n-1}} df_{n-1}$ durch $U \frac{R_n}{R_{n-2}} dx_{n-1}$ ersetzen kann. Daher ist bei der erforderlichen Begrenzung

$$\int U \frac{R_n}{R_{n-1}} df_1 .. df_{n-1} dx_n = \int U \frac{R_n}{R_{n-2}} df_1 .. df_{n-2} dx_{n-1} dx_n$$

Der gefundene Ausdruck für das gesuchte vielfache Integral lässt sich durch analoge Betrachtungen transformiren, indem man zufolge eines Systems von $n-2$ linearen Gleichungen df_{n-2} durch $\frac{R_{n-2}}{R_{n-3}} dx_{n-2}$ ersetzt, wodurch

$$\int U \frac{R_n}{R_{n-2}} df_1 .. df_{n-2} dx_{n-1} dx_n$$

$$= \int U \frac{R_n}{R_{n-3}} df_1 .. df_{n-3} dx_{n-2} dx_{n-1} dx_n$$

wird, u. s. w. Endlich findet man auf demselben Wege

$$\int U \frac{R_n}{R_1} df_1 dx_2 .. dx_n = \int U R_n dx_1 dx_2 .. dx_n$$

indem man zuerst in Bezug auf f_1 integrirend vermöge der Bedingungen

$$dx_2 = 0, \quad dx_3 = 0, \ldots, \quad dx_n = 0$$

das Differential df_1 durch $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1$ d. i. $R_1 dx_1$ ersetzt.

10. Wenn y eine gegebene Function von x ist, so liegt der Punct xy auf einer bestimmten Planlinie. Wenn für alle Puncte xy die zweite Fluxion $\frac{d^2y}{dx^2}$ null ist, so ist die Linie gerad oder sie besteht aus einer Geraden und einer andern Linie. Ausserdem aber ist für den Punct xy Sinn und Grösse der Krümmung der Linie durch Zeichen und Werth der zweiten Fluxion bestimmt. Diesen Bemerkungen, welche bei Erfindung der Differentialrechnung gemacht worden waren, entsprechen folgende Sätze. Wenn z eine gegebene Function von x und y ist,

$$dz = p\,dx + q\,dy$$
$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy\text{*)}$$
$$\frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix}$$

so liegt der Punct xyz auf einer bestimmten Fläche. Wenn für alle Puncte xyz die Functionaldeterminante $rt - s^2$ null ist, so ist die Fläche developpabel, in planum explicabilis**). Ausserdem ist der Punct xyz ein elliptischer, parabolischer, hyperbolischer Punct der Fläche d. h. die Fläche ist daselbst concav-concav (convex-convex), plan-concav (plan-convex), concav-convex, je nachdem $rt - s^2$ positiv, null, negativ, so dass der Gleichung $rt - s^2 = 0$ die parabolischen Puncte der Demarcationslinie entsprechen, welche die elliptischen und die hyperbolischen Puncte der Fläche trennt***). Die Krümmung der gegebenen Fläche in dem Punct xyz derselben (im Gegensatz zu curvatura integra) wird durch dieselbe Functionaldetermi-

---

*) Bezeichnung von Euler Calc. int. 3 n° 299 und Monge Mém. de Paris 1784 p. 126.

**) Monge 1775 Mém. prés. t. 9 p. 382. Euler hatte 1771 Nov. Comm. Petrop. t. 16 p. 3 besondre Gleichungen developpabler Flächen gegeben.

***) Meusnier 1776 Mém. prés. t. 10 p. 476. Vergl. Dupin Développements de géométrie 1813 p. 48. Möbius baryc. Calc. §. 107.

nante berechnet oder bei verschiedenen Methoden, die Flächenpuncte zu bestimmen, durch Aequivalente derselben*).

Der gegebenen Fläche wird von Gauss eine Kugel beigeordnet, deren Centrum im Anfang der orthogonalen Coordinaten liegt und deren Radius eine Längeneinheit ist, so dass dem Flächenpunct xyz derjenige Kugelpunct XYZ entspricht, dessen Radius mit der Normale des Flächenpunctes einerlei Richtung hat. Einem Flächendifferential in der Nähe des Punctes xyz entspricht demnach ein paralleles Kugeldifferential in der Nähe des Punctes XYZ. Das Verhältniss dieses Kugeldifferentials zu jenem Flächendifferential ist das Mass der Krümmung der Fläche in dem Punct xyz. Dasselbe Verhältniss haben die Projectionen der beiden parallelen Flächendifferentiale auf die Ebene xy. Die Fläche des Dreiecks der Puncte

$$(x, y, z), \quad (x + dx, y + dy, z + dz), \quad (x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$$

hat (vergl. unten §. 15) die Projection $\frac{1}{2}(dx\,\delta y - \delta x\,dy)$, während die Fläche des entsprechenden Dreiecks die Projection $\frac{1}{2}(dX\,\delta Y - \delta X\,dY)$ hat. Daher ist die Krümmung der Fläche in dem Punct xyz

$$k = \frac{dY\,\delta Y - \delta X\,dY}{dx\,\delta y - \delta x\,dy}$$

Nun sind X, Y wie z bestimmte Functionen von x, y, d. h.

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy$$

u. s. w., folglich (§. 6, 1)

$$\begin{vmatrix} dX & \delta X \\ dY & \delta Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dX}{\delta x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx & \delta x \\ dy & \delta x \end{vmatrix}$$

$$k = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}$$

die Functionaldeterminante von X, Y nach x, y.

---

*) Gauss Disq. generales circa superf. curvas 1827 (Comm. rec. Gott. VI). Die hier gegebene Form der Rechnung ist in dem Aufsatz des Verf. Leipz. Berichte 1866 p. 1 enthalten.

11. Wenn z eine gegebene Function von x, y ist und ihre Fluxionen in Bezug auf x, y durch p, q, r, s, t bezeichnet werden, so hat man

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy$$
$$X : Y : Z : 1 = p : q : -1 : \sqrt{p^2 + q^2 + 1}$$

Nun ist (5)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial q} \\ \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial q} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix}$$

und in Folge der Werthe

$$X = \frac{p}{R}, \quad Y = \frac{q}{R}, \quad R^2 = p^2 + q^2 + 1$$

findet man (2)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial q} \\ \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial q} \end{vmatrix} = \frac{1}{R^3} \begin{vmatrix} R & \frac{\partial R}{\partial p} & \frac{\partial R}{\partial q} \\ p & 1 & 0 \\ q & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{R^4}$$

also

$$k = \frac{rt - s^2}{(p^2 + q^2 + 1)^2}$$

12. Wenn f eine gegebene Function von x, y, z ist und ihre Fluxionen durch f_1, f_2, f_3, f_{11}, .. bezeichnet werden, so hat man auf der Fläche $f = 0$

$$p = -\frac{f_1}{f_3}, \quad q = -\frac{f_2}{f_3}$$
$$f_3^2(p^2 + q^2 + 1) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$$

wo f_1, f_2, f_3 von x, y, z abhängen, während z von x, y abhängt. Daher ist

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{f_3^3} \begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ f_3 & \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-1}{f_3^4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & f_3 \\ f_1 & f_{11}+f_{13}p & f_{12}+f_{13}q & f_{13} \\ f_2 & f_{12}+f_{23}p & f_{22}+f_{23}q & f_{23} \\ f_3 & f_{13}+f_{33}p & f_{23}+f_{33}q & f_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-1}{f_3^4}\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}$$

also

$$k = \frac{-1}{(f_1^2+f_2^2+f_3^2)^2}\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}$$

Anmerkung. Wenn f eine homogene Function der Variablen x, y, z, w von m Dimensionen ist, so hat man auf der Fläche $f = 0$, $w = 1$

$$0 = xf_1 + yf_2 + zf_3 + f_4$$
$$(m-1)f_1 = xf_{11} + yf_{12} + zf_{13} + f_{14}$$

u. s. w., folglich durch Verbindung der Zeilen und der Colonnen

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & f_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{m-1}\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & f_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_3 \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(m-1)^2}\Sigma \pm f_{11} \ldots f_{44}$$

Diese Determinante stimmt als Functionaldeterminante der $f_1, \ldots, f_4$ mit der Hesse'schen Determinante von f überein (7).

13. Wenn die Coordinaten x, y, z von den Argumenten u, v abhängen, so hat man

$$dx = x_1 du + x_2 dv, \quad dy = y_1 du + y_2 dv, \quad dz = z_1 du + z_2 dv$$

$$\begin{vmatrix} dx & x_1 & x_2 \\ dy & y_1 & y_2 \\ dz & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = A dx + B dy + C dz = 0$$

folglich

$$p = -\frac{A}{C}, \quad q = -\frac{B}{C}$$

$$C^2(p^2 + q^2 + 1) = A^2 + B^2 + C^2$$

Nun ist (5 und 2)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial v} \\ \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{C^3} \begin{vmatrix} A & A_1 & A_2 \\ B & B_1 & B_2 \\ C & C_1 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & A_1 & A_2 \\ B & B_1 & B_2 \\ C & C_1 & C_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & Ax_1 + By_1 + Cz_1 & Ax_2 + By_2 + Cz_2 \\ C_1 & A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 & A_1x_2 + B_1y_2 + C_1z_2 \\ C_2 & A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 & A_2x_2 + B_2y_2 + C_2z_2 \end{vmatrix}$$

Aus den Identitäten

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0, \quad Ax_2 + By_2 + Cz_2 = 0$$
$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + Ax_{11} + By_{11} + Cz_{11} = 0$$

u. s. w. folgt aber

$$\begin{vmatrix} A & A_1 & A_2 \\ B & B_1 & B_2 \\ C & C_1 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1x_1 + \ldots & A_1x_2 + \ldots \\ A_2x_1 + \ldots & A_2x_2 + \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ax_{11} + \ldots & Ax_{12} + \ldots \\ Ax_{12} + \ldots & Ax_{22} + \ldots \end{vmatrix}$$

Demnach ist $k(A^2 + B^2 + C^2)^2 = C^4(rt - s^2)$

$$= \begin{vmatrix} x_{11} & x_1 & x_2 \\ y_{11} & y_1 & y_2 \\ z_{11} & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{22} & x_1 & x_2 \\ y_{22} & y_1 & y_2 \\ z_{22} & z_1 & z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{12} & x_1 & x_2 \\ y_{12} & y_1 & y_2 \\ z_{12} & z_1 & z_2 \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} x_{11}x_{22} + \ldots & x_1x_{22} + \ldots & x_2x_{22} + \ldots \\ x_{11}x_1 + \ldots & x_1x_1 + \ldots & x_2x_1 + \ldots \\ x_{11}x_2 + \ldots & x_1x_2 + \ldots & x_2x_2 + \ldots \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} x_{12}x_{12} + \ldots & x_1x_{12} + \ldots & x_2x_{12} + \ldots \\ x_{12}x_1 + \ldots & x_1x_1 + \ldots & x_2x_1 + \ldots \\ x_{12}x_2 + \ldots & x_1x_2 + \ldots & x_2x_2 + \ldots \end{vmatrix}$$

14. Für das Quadrat eines in dem Punct xyz anfangenden Liniendifferentials der Fläche hat man

$$\begin{aligned} & dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= (p^2 + 1)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (q^2 + 1)dy^2 \\ &= E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2 \end{aligned}$$

wobei

$$E = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad F = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \quad G = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

Die Krümmung k ist von Gauss auch durch die Grössen E, F, G und deren erste und zweite Fluxionen ausgedrückt worden.

Zunächst ist die Determinante der quadratischen Form $Edu^2 + ..$ aus der Determinante der Form $(p^2+1)dx^2 + ..$ ableitbar (§. 6, 5), folglich

$$EG - F^2 = (p^2 + q^2 + 1)C^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

Ferner ergiebt die Differentiation nach u und v

$$\begin{array}{ll}
\tfrac{1}{2}E_1 = x_1 x_{11} + .. & \tfrac{1}{2}G_1 = x_2 x_{12} + .. \\
\tfrac{1}{2}E_2 = x_1 x_{12} + .. & \tfrac{1}{2}G_2 = x_2 x_{22} + .. \\
\tfrac{1}{2}E_{22} = x_{12}x_{12} + .. + x_1 x_{122} + .. & \tfrac{1}{2}G_{11} = x_{12}x_{12} + .. + x_2 x_{112} + .. \\
F_1 = x_2 x_{11} + .. + x_1 x_{12} + .. & F_2 = x_2 x_{12} + .. + x_1 x_{22} + ..
\end{array}$$

$$F_{12} = x_{11}x_{22} + .. + x_2 x_{112} + .. + x_{12}x_{12} + .. + x_1 x_{122} + ..$$

$$F_{12} - \tfrac{1}{2}E_{22} - \tfrac{1}{2}G_{11} = x_{11}x_{22} + .. - x_{12}x_{12} - ..$$

Durch Benutzung dieser Werthe erhält man aus dem obenstehenden Ausdruck (13) den folgenden für $k(EG - F^2)^2$:

$$\begin{vmatrix} F_{12} - \tfrac{1}{2}E_{22} - \tfrac{1}{2}G_{11} & F_2 - \tfrac{1}{2}G_1 & \tfrac{1}{2}G_2 \\ \tfrac{1}{2}E_1 & E & F \\ F_1 - \tfrac{1}{2}E_2 & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \tfrac{1}{2}E_2 & \tfrac{1}{2}G_1 \\ \tfrac{1}{2}E_2 & E & F \\ \tfrac{1}{2}G_1 & F & G \end{vmatrix}$$

Anmerkung. Liouville (Journ. 16 p. 131) hat $EG - F^2 = D^2$ gesetzt und gefunden

$$-kD = \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{D}\left(\tfrac{1}{2}G_1 + \tfrac{1}{2}G_2\frac{F}{G} - F_2\right) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{D}\left(\tfrac{1}{2}E_2 - \tfrac{1}{2}G_1\frac{F}{G}\right)$$

15. Wenn die reciproken Functionaldeterminanten (6. II)

$$R = \frac{\partial(f_1, .., f_n)}{\partial(x_1, .., x_n)} = a_{i1}\alpha_{i1} + .. + a_{in}\alpha_{in}$$

$$S = \frac{\partial(x_1, .., x_n)}{\partial(f_1, .., f_n)} = b_{i1}\beta_{i1} + .. + b_{in}\beta_{in}$$

nicht null sind, und wenn t eine Grösse bedeutet, von welcher

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ auf gegebene Weise abhängen, so kann man die Fluxionen

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t}, \ldots, \quad \frac{\partial f_n}{\partial t}$$

welche zunächst Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, von den Variablen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ abhängig machen, um sie in Bezug auf diese Variablen zu differentiiren. Die Functionaldeterminante R, welche zunächst eine Function von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist, kann ebenfalls durch $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ausgedrückt und dann nach t differentiirt werden. Wenn andererseits u eine Variable bedeutet, von welcher $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf gegebene Weise abhängen u. s. w., so ist*)

$$\frac{\partial}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial t} = \frac{\partial \log R}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial f_1}\left(S\frac{\partial f_1}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial f_2}\left(S\frac{\partial f_2}{\partial t}\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial f_n}\left(S\frac{\partial f_n}{\partial t}\right) = 0$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u} = \frac{\partial \log S}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(R\frac{\partial x_1}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(R\frac{\partial x_2}{\partial u}\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(R\frac{\partial x_n}{\partial u}\right) = 0$$

Insbesondere ist**)

$$\frac{\partial \beta_{k1}}{\partial f_1} + \frac{\partial \beta_{k2}}{\partial f_2} + \ldots + \frac{\partial \beta_{kn}}{\partial f_n} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{k2}}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \alpha_{kn}}{\partial x_n} = 0$$

Beweis. Nach §. 3, 15 hat man

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \sum_{ik} \alpha_{ik}\frac{\partial a_{ik}}{\partial t}$$

wo $\alpha_{ik} = R\frac{\partial x_k}{\partial f_i}$ und $\frac{\partial a_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t\,\partial x_k}$. Nun ist

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial t\,\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial f_i} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t\,\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial f_i} + \ldots + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t\,\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial f_i} = \frac{\partial}{\partial f_i}\frac{\partial f_i}{\partial t}$$

---

*) Jacobi det. funct. §. 9. Vergl. Jacobi Crelle J. 27 p. 209.

**) Jacobi Crelle J. 27 p. 203.

folglich

$$\frac{\partial R}{\partial t} = R \sum_i \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t} \qquad \frac{\partial \log R}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

Ferner ist $RS = 1$, also $\log R + \log S = 0$, und

$$0 = \frac{\partial \log S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

Da die Functionaldeterminante S eine Function der Grössen f_1, $f_2, \ldots, f_n$ ist, welche die Variable t enthalten, so hat man

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial S}{\partial f_n} \frac{\partial f_n}{\partial t}$$

Nimmt man hinzu, dass

$$\frac{\partial S}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + S \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial f_i}\left(S \frac{\partial f_i}{\partial t}\right)$$

ist, so erhält man die zweite der aufgestellten Identitäten. Die analogen Identitäten ergeben sich durch gleichzeitige Vertauschung von t mit u, f mit x, R mit S.

Wenn insbesondere $t = x_k$, so ist

$$S \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \beta_{ki} \quad \text{u. s. w.}$$

16. Wenn $X, X_1, \ldots, X_n$ gegebene Functionen von $x, x_1 \ldots, x_n$ bedeuten, f eine unbestimmte Function derselben Variablen und

$$\psi(f) = X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

ist; wenn ferner n von einander unabhängige Lösungen der linearen partialen Differentialgleichung $\psi(f) = 0$ durch f_1, $f_2, \ldots, f_n$ bezeichnet werden, so dass $\psi(f_1), \psi(f_2), \ldots, \psi(f_n)$ identisch verschwinden: so lässt sich ein Multiplicator M angeben, durch welchen $\psi(f)$ zur Determinante der Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ wird. Es ist nämlich

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = A\frac{\partial f}{\partial x} + A_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

folglich $M\psi(f) = R$, wenn $M = A_i : X_i$. In der That verschwinden R und $\psi(f)$, wenn für f eine der Functionen $f_1, f_2, \ldots$ gesetzt wird. Zufolge der in (15) bewiesenen Eigenschaft der Adjuncten $A, A_1, \ldots, A_n$ ist der Multiplicator M eine Lösung der linearen partialen Differentialgleichung*)

$$\frac{\partial(\mu X)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu X_1)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial(\mu X_n)}{\partial x_n} = 0$$

Anmerkung. Die durch M bezeichnete Function der Grössen $x, x_1, \ldots, x_n$ wird nach Jacobi (l. c.) der **Multiplicator** der partialen Differentialgleichung $\psi(f) = 0$, oder der partialen Differentialgleichung

$$0 = X - X_1\frac{\partial x}{\partial x_1} - \ldots - X_n\frac{\partial x}{\partial x_n}$$

oder des Systems von gemeinen Differentialgleichungen

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n$$

genannt, weil die Lösungen jener partialen Differentialgleichungen und dieses Systems gemeiner Differentialgleichungen im engsten Zusammenhange stehen. Ist nämlich π eine Lösung der Gleichung $\psi(f) = 0$ und x dadurch von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abhängig gemacht, dass man π einer willkürlichen Constante gleichgesetzt hat, so hat man

$$0 = X\frac{\partial \pi}{\partial x} + X_1\frac{\partial \pi}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial \pi}{\partial x_n}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \frac{\partial \pi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_i} = 0$$

---

*) Jacobi Crelle J. 27 p. 210. Vergl. dessen Vorlesungen über Dynamik. Malmstèn Liouv. J. 1862 p. 257.

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} : \frac{\partial \pi}{\partial x_1} : \frac{\partial \pi}{\partial x_2} : \ldots = 1 : -\frac{\partial x}{\partial x_1} : -\frac{\partial x}{\partial x_2} : \ldots$$

$$0 = X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - \ldots - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}$$

Sind andrerseits $f_1, f_2, \ldots, f_n$ von einander unabhängige Lösungen der Gleichung $\psi(f) = 0$ und willkürlichen Constanten gleichgesetzt, so hat man

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} dx + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n = 0$$

und die Lösung dieses linearen Systems

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots = A : A_1 : A_2 : \ldots$$
$$= X : X_1 : X_2 : \ldots$$

§. 13. Die homogenen Functionen, insbesondere die quadratischen Formen.

1. Wenn u eine homogene Function der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von m Dimensionen ist, wenn man $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ durch u_i bezeichnet, so ist nach Euler's Theorem*) identisch (bei allen x)

$$mu = u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n$$

Indem man denselben Satz auf die homogenen Functionen $u_1, u_2, \ldots,$ von $m - 1$ Dimensionen anwendet und $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ durch u_{ik} bezeichnet, erhält man bei allen x

$$(m-1) u_1 = u_{11} x_1 + \ldots + u_{n1} x_n$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(m-1) u_n = u_{1n} x_1 + \ldots + u_{nn} x_n$$

2. Nach den angenommenen Bezeichnungen ist**)

$$m(m-1) u = \Sigma x_i x_k u_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

---

*) Mechanica 1736 tom. II, §. 106. 497. Calc. diff. §. 225.

**) Lacroix Calc. diff. §. 292.

Wenn man nämlich die obigen Identitäten der Reihe nach mit $x_1, x_2, .., x_n$ multiplicirt und addirt, so findet man auf der rechten Seite die angegebene Summe, weil $u_{ik} = u_{ki}$, und auf der linken Seite $m(m-1)u$ nach (1).

Alle diese Ausdrücke der homogenen Function durch ihre ersten, zweiten, .. Fluxionen ergeben sich, wenn man die Identität

$$f(x_1 + \omega x_1, x_2 + \omega x_2, .., x_n + \omega x_n) = (1+\omega)^m f(x_1, x_2, .., x_n)$$

nach steigenden Potenzen von ω entwickelt.

3. Die Determinante $(n+1)$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} \frac{m}{m-1} u & u_1 & .. & u_n \\ u_1 & u_{11} & .. & u_{n1} \\ . & . & . & . \\ u_n & u_{1n} & .. & u_{nn} \end{vmatrix}$$

ist null, weil nach Multiplication der ersten Colonne mit $m-1$ und nach Subtraction der mit den Variablen multiplicirten übrigen Colonnen alle Elemente der ersten Colonne null werden.

In R hat das erste Element die Adjuncte

$$v = \begin{vmatrix} u_{11} & .. & u_{1n} \\ . & ... & . \\ u_{n1} & .. & u_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u_1, .., u_n)}{\partial(x_1, .., x_n)}$$

die Hesse'sche Determinante von u (§. 12, 7). In v habe das Element u_{ik} die Adjuncte α_{ik}. Dann ist $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$, weil $u_{ki} = u_{ik}$ (§. 3, 5), und (1)

$$v x_i = (m-1)(\alpha_{1i} u_1 + .. + \alpha_{ni} u_n)$$

Durch Entwickelung von R nach den Elementen des Randes (§. 5, 5) erhält man bei allen x*)

$$\frac{m}{m-1} uv + \begin{vmatrix} 0 & u_1 & . \\ u_1 & u_{11} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = 0, \quad \frac{m}{m-1} uv = \Sigma\, u_i u_k \alpha_{ik}$$

*) Hesse Crelle J. 38 p. 242.

4. Das System (1)

$$
\begin{aligned}
-(m-1)\frac{mu}{m-1} &+ u_1\, x_1 + \ldots + u_n\, x_n = 0\\
-(m-1)\quad u_1 &+ u_{11} x_1 + \ldots + u_{n1} x_n = 0\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot &\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
-(m-1)\quad u_n &+ u_{1n} x_1 + \ldots + u_{nn} x_n = 0
\end{aligned}
$$

ist linear für $-(m-1)$, x_1, x_2 mit der Determinante $R = 0$. In R habe das Element der Zeile i und der Colonne k die Adjuncte β_{ik}. Dann ist

$$\beta_{ki} = \beta_{ik}, \quad \beta_{ik}{}^2 = \beta_{ii}\beta_{kk} \ (\S.\ 5,\ 7),\ \beta_{00} = v.$$

Wenn v nicht bei allen x null ist, so hat das lineare System die Lösung (§. 8, 2)

$$
\begin{aligned}
-(m-1) : x_1 : x_2 : \ldots &= v : \beta_{01} : \beta_{02} : \ldots\\
&= \sqrt{v} : \sqrt{\beta_{11}} : \sqrt{\beta_{22}} : \ldots\\
\beta_{0i} &= \frac{-x_i}{m-1}\, v\\
\beta_{ik} = \sqrt{\beta_{ii}}\sqrt{\beta_{kk}} &= \frac{x_i x_k}{(m-1)^2}\, v\ {}^{*})
\end{aligned}
$$

5. Die bewiesenen Relationen leisten einen wichtigen Dienst in der Theorie der Krümmung von Linien und Flächen. Wenn f eine Function der orthogonalen Coordinaten x, y eines Punctes ist, also $f = 0$ die Gleichung der Linie ist, auf welcher der Punct xy liegt; wenn ferner

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = f_{12} = f_{21}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$$

gesetzt wird, so ist bekanntlich

$$x - \xi : y - \eta = f_1 : f_2$$

die Gleichung für die Normale der Linie $f = 0$ durch den

---

*) Hiermit stimmen die von Hesse (Crelle J. 28 p. 103 und 38 p. 242) gegebenen Relationen überein.

Punct xy derselben, wobei ξ, η die Coordinaten irgend eines Punctes der Normale bedeuten. Setzt man

$$\lambda(x-\xi) = f_1, \qquad \lambda(y-\eta) = f_2$$

und differentiirt diese Gleichungen, so erhält man

$$f_1 dx + f_2 dy = 0$$

$$(x-\xi)d\lambda + \lambda dx = df_1, \qquad (y-\eta)d\lambda + \lambda dy = df_2$$

oder

$$f_1\frac{d\lambda}{\lambda} = df_1 - \lambda dx, \qquad f_2\frac{d\lambda}{\lambda} = df_2 - \lambda dy$$

für die Normale der Linie $f=0$ durch den Punct $(x+dx, y+dy)$, welche mit der ersten Normale den Punct $\xi\eta$ gemein hat, d. i. das Centrum der Krümmung, welche die Linie $f=0$ im Puncte xy hat. Aus dem System

$$\begin{aligned} 0 &= f_1 dx + f_2 dy \\ f_1\frac{d\lambda}{\lambda} &= (f_{11}-\lambda)dx + f_{12}dy \\ f_2\frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{21}dx + (f_{22}-\lambda)dy \end{aligned}$$

folgt (§. 8)

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_1 \\ f_1 & f_{11}-\lambda & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(f_1^2+f_2^2)\lambda + L = 0, \quad L = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}$$

Endlich hat man für den Radius ϱ des Krümmungskreises

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \frac{f_1^2+f_2^2}{\lambda^2}$$

und die Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{-L}{(f_1^2+f_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Die Determinante L ist leichter zu behandeln, wenn die Function, auf welche sie sich bezieht, homogen ist. Versteht man unter u die homogene Function der Variablen x_1, x_2, x_3,

welche mit f identisch wird, wenn $x_3 = 1$, so hat man (4) bei $n = 3$

$$L = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_1 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = \beta_{33} = \frac{v}{(m-1)^2}$$

worin $v = \Sigma \pm u_{11} u_{22} u_{33}$ und nach der Differentiation $x_3 = 1$ zu setzen ist.

Der Punct der Linie $f = 0$ (oder $u = 0$), in welchem die Krümmung verschwindet, ist ein Wendepunct der Linie (im weitern Sinn). Dazu genügt die Gleichung $L = 0$ (oder $v = 0$), wenn $f_1{}^2 + f_2{}^2$ nicht null, der Punct kein mehrfacher ist. Also sind die Wendepuncte gemeinschaftliche Puncte der Linien $f = 0$ (oder $u = 0$) und $L = 0$ (oder $v = 0$). Nun sind f und u nach Voraussetzung $m$ten Grades, v aber $3(m-2)$ten Grades, folglich haben die gedachten Linien $3m(m-2)$ gemeinschaftliche Puncte, die Wendepuncte der Linie $f = 0$ sind, d. h. eine Linie $m$ter Ordnung ohne mehrfache Puncte hat $3m(m-2)$ Wendepuncte*).

6. Wenn f eine Function der orthogonalen Coordinaten x, y, z eines Punctes, als $f = 0$ die Gleichung der Fläche ist, auf welcher der Punct xyz liegt, so sind für den Punct $\xi\eta\zeta$, welcher auf der den Punct xyz enthaltenden Normale der Fläche liegt,

$$\frac{x-\xi}{f_1} = \frac{y-\eta}{f_2} = \frac{z-\zeta}{f_3} = \frac{1}{\lambda}$$

Die Normalen der Fläche $f = 0$ durch die Puncte (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ schneiden sich im Allgemeinen nicht, sondern nur dann, wenn der zuletzt genannte Punct auf einer durch xyz gehenden Krümmungslinie liegt**). Ihr Durchschnitt

*) Dieser Satz ist 1834 von Plücker (Crelle J. 12 p. 105, System 1835 p. 264) aufgestellt worden. Der hier mitgetheilte Beweis rührt von Hesse (l. c.) her. Einen andern Beweis findet man bei Jacobi (Crelle J. 40 p. 254).

**) Bei genauer Infinitesimalbetrachtung findet man (Scheibner briefl. Mittheilung), dass in diesem Falle bei verschwindender Distanz der Fusspuncte die Distanz der Normalen verschwindend 3ten Grades ist. Vergl. Bouquet Liouv. J. 11 p. 125.

$\xi\eta\zeta$ ist das Krümmungscentrum eines Hauptschnitts der Fläche für den Punct xyz. Durch Differentiation der obigen Gleichungen findet man für diesen Fall

$$(x-\xi)d\lambda + \lambda dx = df_1, \quad \text{u. s. w.}$$

oder

$$f_1\frac{d\lambda}{\lambda} = df_1 - \lambda dx$$
$$f_2\frac{d\lambda}{\lambda} = df_2 - \lambda dy$$
$$f_3\frac{d\lambda}{\lambda} = df_3 - \lambda dz$$

Folglich (§. 8) ist

$$\begin{vmatrix} f_1 & df_1 & dx \\ f_2 & df_2 & dy \\ f_3 & df_3 & dz \end{vmatrix} = 0$$

die Differentialgleichung, welche in Verbindung mit $f = 0$ die durch den Punct xyz gehenden Krümmungslinien bestimmt. Aus dem System

$$\begin{array}{rcllll} 0 & = & f_1\,dx & + f_2\,dy & + f_3\,dz \\ f_1\frac{d\lambda}{\lambda} & = & (f_{11}-\lambda)dx & + f_{12}dy & + f_{13}dz \\ f_2\frac{d\lambda}{\lambda} & = & f_{12}dx + (f_{22}-\lambda)dy & & + f_{23}dz \\ f_3\frac{d\lambda}{\lambda} & = & f_{13}dx & + f_{23}dy + (f_{33}-\lambda)dz & \end{array}$$

folgt zur Bestimmung von λ

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11}-\lambda & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22}-\lambda & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(f_1^2+f_2^2+f_3^2)\lambda^2 + K\lambda + L = 0$$

eine Gleichung zweiten Grades mit den Wurzeln λ', λ'', so dass

$$(f_1^2+f_2^2+f_3^2)\lambda'\lambda'' + L = 0$$

Wenn man endlich den Abstand des Punctes $\xi\eta\zeta$ von xyz durch ϱ bezeichnet, so ist

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta), \quad \lambda^2\varrho^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$$

Demnach hat auch ϱ zwei Werthe ϱ', ϱ'', so dass

$$\lambda'\lambda''\varrho'\varrho'' = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$$

Die reciproken Werthe von ϱ' und ϱ'' sind aber die Krümmungen der durch xyz gehenden Krümmungslinien und der von ihnen berührten Hauptschnitte der Fläche, also ist das Product der Hauptkrümmungen der Fläche $f = 0$ in dem Puncte xyz

$$\frac{1}{\varrho'\varrho''} = \frac{-L}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^2} \text{ (vergl. §. 12, 12.)}$$

Versteht man unter u die homogene Function der Variablen x_1, x_2, x_3, x_4, welche bei $x_4 = 1$ mit f zusammenfällt, so hat man (4) bei $n = 4$

$$L = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} = \beta_{44} = \frac{v}{(m-1)^2}$$

Die Puncte der Fläche $f = 0$ oder $u = 0$, für welche L oder v verschwindet, sind parabolische Puncte der Fläche (§. 12, 10), und liegen auf der Demarcationslinie ($f = 0$, $L = 0$) oder ($u = 0$, $v = 0$), welche die elliptischen Puncte der Fläche von den hyperbolischen trennt. Nun sind f und u nach Voraussetzung $m$ten Grades, v aber $4(m-2)$ten Grades, also ist die Demarcationslinie einer Fläche $m$ter Ordnung eine Linie $m \times 4(m-2)$ter Ordnung*).

7. I. Aus den in (1) gegebenen Identitäten hat Jacobi**), veranlasst durch einen von Hesse mitgetheilten Satz, folgendes die Fluxionen der Determinante

$$v_k = \frac{\partial v}{\partial x_k} \qquad v_{kl} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l}$$

betreffende System von Identitäten entwickelt. Indem man (3)

$$v x_i = (m-1)(\alpha_{1i} u_1 + \ldots + \alpha_{ni} u_n)$$

---

*) Hesse l. c.

**) Crelle J. 40 p. 318.

in Bezug auf x_i oder x_k differentiirt, erhält man

$$v_i x_i = (m-1)\left(\frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_i} u_1 + \ldots + \frac{\partial \alpha_{ni}}{\partial x_i} u_n\right) + (m-2)v$$

$$v_k x_i = (m-1)\left(\frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_k} u_1 + \ldots + \frac{\partial \alpha_{ni}}{\partial x_k} u_n\right)$$

weil (§. 3, 2)

$$\alpha_{1i} u_{1i} + \ldots + \alpha_{ni} u_{ni} = v$$
$$\alpha_{1i} u_{1k} + \ldots + \alpha_{ni} u_{nk} = 0$$

Durch abermalige Differentiation erhält man

$$v_{ik} x_i = (m-1)\left(\frac{\partial^2 \alpha_{1i}}{\partial x_i \partial x_k} u_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \alpha_{ni}}{\partial x_i \partial x_k} u_n\right)$$
$$-(m-1)\left(\alpha_{1i} \frac{\partial u_{1i}}{\partial x_k} + \ldots + \alpha_{ni} \frac{\partial u_{ni}}{\partial x_k}\right) + (m-2)v_k$$

$$v_{kl} x_i = (m-1)\left(\frac{\partial^2 \alpha_{1i}}{\partial x_k \partial x_l} u_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \alpha_{ni}}{\partial x_k \partial x_l} u_n\right)$$
$$-(m-1)\left(\alpha_{1i} \frac{\partial u_{1l}}{\partial x_k} + \ldots + \alpha_{ni} \frac{\partial u_{nl}}{\partial x_k}\right)$$

indem man die Differentiation der Identitäten

$$\alpha_{1i} u_{1i} + \ldots + \alpha_{ni} u_{ni} = v$$
$$\alpha_{1i} u_{1l} + \ldots + \alpha_{ni} u_{nl} = 0$$

in Bezug auf x_k zu Hülfe nimmt.

II. Dem System $(u_1 = 0, \ldots, u_n = 0)$, bei welchem u, v, $v_1, \ldots, v_n$ null sind (I), genügen im Allgemeinen nur $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$. Wenn aber diesem System solche x genügen, die nicht alle null sind, so ist die Form u singulär, dergestalt dass die Gleichung $u = 0$ an dieser Stelle keine Differentialgleichung erster Ordnung hat. Zugleich ist die Determinante v singulär, so dass die Gleichung $v = 0$ an derselben Stelle keine Differentialgleichung erster Ordnung hat. Das lineare System für solche x

$$u_{11} x_1 + \ldots + u_{1n} x_n = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$u_{n1} x_1 + \ldots + u_{nn} x_n = 0$$

hat die Determinante v, welche null ist. Wenn dabei

$$\alpha_{11} = \frac{\partial(u_2, .., u_n)}{\partial(x_2, .., x_n)}$$

nicht null ist, so hat das System die Lösung

$$x_1 : x_2 : x_3 : .. = \alpha_{11} : \alpha_{12} : \alpha_{13} : ..$$
$$= \sqrt{\alpha_{11}} : \sqrt{\alpha_{22}} : \sqrt{\alpha_{33}} : ..$$

$$\text{d. h.} \quad \alpha_{ik} = \sqrt{\alpha_{ii}}\sqrt{\alpha_{kk}} = \frac{x_i x_k}{x_1^2}\alpha_{11}$$

Durch diese Substitutionen erhält man (I)

$$-v_{ik}x_i = (m-1)\left(\alpha_{1i}\frac{\partial u_{1i}}{\partial x_k} + .. + \alpha_{ni}\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_k}\right)$$
$$= \frac{(m-1)x_i\alpha_{11}}{x_1^2}\left(x_1\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_1} + .. + x_n\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_n}\right)$$

d. i. nach (1)

$$v_{ik} = -\frac{(m-1)(m-2)\alpha_{11}}{x_1^2}u_{ik}$$

folglich*)

$$v_{11} : v_{12} : .. : v_{23} : .. = u_{11} : u_{12} : .. : u_{23} : ..$$

weshalb auch die Determinante $\Sigma \pm v_{11} .. v_{nn}$ verschwindet.

Wenn der Punct x dem System $(u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0)$ genügt, so ist er ein Doppelpunct der Linie $u = 0$, deren Tangenten daselbst durch die Proportion der zweiten Fluxionen von u bestimmt werden. Demnach ist ein 2facher Punct der $u = 0$ mit getrennten Tangenten ein 2facher Punct der Linie $v = 0$ mit denselben Tangenten. Bei vereinten Tangenten ist eine Spitze der $u = 0$ ein 3facher Punct der $v = 0$ mit 3 Tangenten, von welchen 2 mit der Spitzentangente vereint sind (Salmon plane curves 1852 n⁰ 85). Ein Doppelpunct der $u = 0$ gehört zu den Puncten $(u = 0,\ v = 0)$, ohne ein Wendepunct der $u = 0$ zu sein (5); er enthält $2 \times 2 + 2$ (bei vereinten Tangenten $2 \times 3 + 2$) gemeinschaftliche Puncte der Linien $u = 0$, $v = 0$, welche nicht Wendepuncte der Linie $u = 0$ sind. Plücker System 1835 p. 266.

---

*) Hesse Crelle J. 40 p. 316. Vergl. Jacobi l. c.

8. I. Auf die Functionaldeterminante von n Formen verschiedener Grade derselben n Variablen beziehen sich die analogen von HESSE (anal. Geom. des Raumes p. 100) gegebenen Betrachtungen. Es sei a_i eine Form $m_i$ten Grades der $x_1, .., x_n$, ferner

$$a_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \qquad A = \frac{\partial(a_1, .., a_n)}{\partial(x_1, .., x_n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . \\ a_{21} & a_{22} & . \\ . & . & . \end{vmatrix}$$

und α_{ik} die Adjuncte von a_{ik} in A, so ist

$$a_{i1} x_1 + .. + a_{in} x_n = m_i a_i$$

Wenn man in A die Colonne i mit x_i multiplicirt und die mit den Variablen multiplicirten andern Colonnen addirt, so erhält man

$$A x_i = m_1 a_1 \alpha_{1i} + .. + m_n a_n \alpha_{ni}$$

und durch Differentiation nach x_i

$$A + \frac{\partial A}{\partial x_i} x_i = m_1 a_1 \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_i} + .. \\ + m_1 a_{1i} \alpha_{1i} + ..$$

oder, weil $A = a_{1i}\alpha_{1i} + a_{2i}\alpha_{2i} + ..$,

$$(1 - m_1) A + \frac{\partial A}{\partial x_i} x_i = m_1 a_1 \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_i} + .. \\ + (m_2 - m_1) a_{2i} \alpha_{2i} + ..$$

Durch Differentiation nach x_k folgt

$$\frac{\partial A}{\partial x_k} x_i = m_1 a_1 \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_k} + .. \\ + m_1 a_{1k} \alpha_{1i} + ..$$

oder, weil $0 = a_{1k}\alpha_{1i} + a_{2k}\alpha_{2i} + ..$,

$$\frac{\partial A}{\partial x_k} x_i = m_1 a_1 \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_k} + .. \\ + (m_2 - m_1) a_{2k} \alpha_{2i} + ..$$

II. Bei solchen x, die dem System $(a_1 = 0, .., a_n = 0)$ genügen, ist

$$A = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} x_i = (m_2 - m_1) a_{2i} \alpha_{2i} + (m_3 - m_1) a_{3i} \alpha_{3i} + \ldots$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_k} x_i = (m_2 - m_1) a_{2k} \alpha_{2i} + (m_3 - m_1) a_{3k} \alpha_{3i} + \ldots$$

Insbesondere sind bei gleichen Graden m die ersten Fluxionen der A null. Wenn $m_1, \ldots, m_{n-1}$ einander gleich sind, so ist

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} x_i = (m_n - m_1) a_{ni} \alpha_{ni} \qquad \frac{\partial A}{\partial x_k} x_i = (m_n - m_1) a_{nk} \alpha_{ni}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} : \frac{\partial A}{\partial x_k} = a_{ni} : a_{nk}$$

Wenn $m_1, \ldots, m_{r-1}$ einander gleich sind, so ist

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} x_i = (m_r - m_1) a_{ri} \alpha_{ri} + (m_{r+1} - m_1) a_{r+1,i} \alpha_{r+1,i} + \ldots$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_k} x_i = (m_r - m_1) a_{rk} \alpha_{ri} + (m_{r+1} - m_1) a_{r+1,k} \alpha_{r+1,i} + \ldots$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} : \frac{\partial A}{\partial x_k} = \frac{p_r a_{ri} + p_{r+1} a_{r+1,i} + \ldots}{p_r a_{rk} + p_{r+1} a_{r+1,k} + \ldots}$$

Die Gleichung $a_i = 0$ bedeutet bei $n = 2$ einen (mehrdeutig) bestimmten Punct einer Geraden, bei $n = 3$ eine Linie einer Ebene, bei $n = 4$ eine Fläche des Raumes. Die Gleichung $A = 0$ bedeutet dann den den Puncten $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ einer Geraden zugehörigen Jacobi'schen Punct, die den Linien $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ einer Ebene zugehörige Jacobi'sche Linie, die den Flächen $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$ zugehörige Jacobi'sche Fläche: Sylvester 1853 Philos. Transcr. t. 143, III p. 546. Vergl. Cremona curve piane p. 17 und 72, u. A.

9. Die homogene Function u von m Dimensionen wird, wenn sie ganz ist und ganze Coefficienten hat, eine Form $m$ten Grades (linear, quadratisch, cubisch u. s. w.) von n unbestimmten Variablen (binär, ternär u. s. w.) ge-

nannt*). Eine quadratische Form (häufig »Form« schlechthin) kann durch

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k$$

eine cubische Form durch

$$\sum_{ikl} a_{ikl} x_i x_k x_l \text{**)}$$

dargestellt werden, wobei i, k, l alle Werthe von 1 bis n erhalten und die Grössen a_{ik}, a_{ikl} durch Umstellung ihrer Nummern keine Veränderung erleiden. Unter der Determinante einer quadratischen Form versteht man die Determinante des Systems ihrer Coefficienten. Ist $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn} = R$, so heisst R die Determinante der Form $u = \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k$ (bei Gauss $-R$).

Wenn α_{ik} die Adjuncte von a_{ik} in dem System der Coefficienten bedeutet, so heisst die quadratische Form

$$U = \sum_{ik} \alpha_{ik} y_i y_k$$

(bei Gauss $-U$) der Form u adjungirt***). Nach §. 7, 1 hat man

$$\Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn} = R^{n-1}$$

d. h. die Determinante der adjungirten Form ist die $(n-1)$te Potenz der Determinante der Form.

Die adjungirte Form U und die Form u können als Determinanten dargestellt werden. Nach §. 5, 5 hat man

$$-U = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & \ldots & y_n \\ y_1 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ y_n & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Nach derselben Entwickelungsregel ist

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & \ldots & x_n \\ x_1 & \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ x_n & \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = -\Sigma x_i x_k A_{ik}$$

*) Gauss Disquis. arithm. art. 153 und 266.
**) Vergl. Hesse Crelle J. 28 p. 74.
***) Forma adjuncta. Gauss l. c. 267.

wenn A_{ik} die Adjuncte von α_{ik} in dem System der Coefficienten α bedeutet. Nun ist $A_{ik} = R^{n-2} a_{ik}$ (§. 7, 2), folglich*)

$$-R^{n-2}u = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & .. & x_n \\ x_1 & \alpha_{11} & .. & \alpha_{1n} \\ . & . & .. & . \\ x_n & \alpha_{n1} & .. & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

10. Die Form $u = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ wird durch $u_1 x_1 + .. + u_n x_n$ ausgedrückt, so dass

$$u_i = a_{i1} x_1 + .. + a_{in} x_n$$

den halben Differentialquotienten von u in Bezug auf x_i bedeutet (1). Wenn die Determinante der Form verschwindet, so sind $u_1, .., u_n$ bei beliebigen x durch eine homogene lineare Gleichung

$$u_1 c_1 + .. + u_n c_n = 0$$

verbunden, deren Coefficienten sich verhalten wie die Adjuncten einer Colonne (Zeile) des Systems a. Unter der Voraussetzung, dass c_s nicht null ist, geht die Form durch die Vertauschung von x_i mit

$$x_i - c_i \frac{x_s}{c_s} \qquad (i = 1, 2, .., n)$$

über in eine Form von $n-1$ Unbestimmten (§. 8, 2. §. 12, 7). In der That ist $a_{i1} c_1 + .. + a_{in} c_n = 0$, daher

$$u_i = a_{i1}\left(x_1 - c_1 \frac{x_s}{c_s}\right) + .. + a_{i,n-1}\left(x_{n-1} - c_{n-1}\frac{x_s}{c_s}\right)$$

$$u = u_1\left(x_1 - c_1 \frac{x_s}{c_s}\right) + .. + u_{n-1}\left(x_{n-1} - c_{n-1}\frac{x_s}{c_s}\right)$$

Dabei ist die adjungirte Form $\Sigma \alpha_{ik} y_i y_k$ ein Quadrat (§. 5, 7). Die quadratischen Formen von n Variablen mit verschwindender Determinante werden als singuläre ausgeschieden von den ordinären mit nicht verschwindender Determinante, welche als Formen von weniger Variablen sich nicht darstellen lassen.

---

*) Brioschi Det. (53).

Beispiel. $u = x^2 + y^2 + 9z^2 + 6yz - 6xz - 2xy + 2xt - 4zt$
In dem System

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 9 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

hat die erste Zeile die Adjuncten -4, 2, -2, 0. Die Determinante von u ist null, also kann $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$, $c_4 = 0$ gesetzt werden, und man findet nach den angezeigten Vertauschungen

$$\begin{aligned} u &= (y + \tfrac{1}{2}x)^2 + 9(z - \tfrac{1}{2}x)^2 + 6(y + \tfrac{1}{2}x)(z - \tfrac{1}{2}x) - 4(z - \tfrac{1}{2}x)t \\ &= (x + 2y)^2 + 9(z + y)^2 - 6(x + 2y)(z + y) + 2(x + 2y)t - 4(z + y)t \\ &= (x - 2z)^2 - (y + z)^2 - 2(x - 2z)(y + z) + 2(x - 2z)t \end{aligned}$$

durch 3 Unbestimmte ausgedrückt.

11. Eine ordinäre quadratische Form von n Variablen lässt sich durch n Quadrate linearer Formen ihrer Variablen darstellen*).

Wenn a_{ii} nicht null ist, so ist

$$u = a_{ii}x_i^2 + 2x_i p + u'$$

wobei die lineare Form p und die quadratische Form u' die Variable x_i nicht enthalten; folglich

$$a_{ii}u = (a_{ii}x_i + p)^2 + a_{ii}u' - p^2$$

Wenn aber alle a_{ii} null sind und a_{ik} nicht null ist, so hat man

$$u = 2a_{ik}x_i x_k + 2x_i q + 2x_k p + u''$$

wobei p, q, u'' die beiden Variablen x_i, x_k nicht enthalten; folglich

$$\begin{aligned} 2a_{ik}u &= 4(a_{ik}x_i + p)(a_{ik}x_k + q) + 2a_{ik}u'' - 4pq \\ &= (a_{ik}x_i + p + a_{ik}x_k + q)^2 - (a_{ik}x_i + p - a_{ik}x_k - q)^2 + 2a_{ik}u'' - 4pq \end{aligned}$$

In dem ersten Falle besteht die Form u aus einem Quadrat und einer quadratischen Form von $n - 1$ Variablen, in dem zweiten Falle besteht sie aus 2 Quadraten und einer quadra-

---

*) Lagrange 1759 Misc. Taur. 1 p. 18. Mécanique t. 1, III. Gauss Disq. arithm. 271. Theoria comb. observ. 31 (Comm. Gött. 1819).

tischen Form von $n-2$ Variablen. Von den übrigen Formen können wiederum Quadrate abgelöst werden, u. s. w.

Wenn $\Sigma a_{ik} x_i x_k = \alpha_1 y_1{}^2 + \ldots + \alpha_n y_n{}^2$ und ε die Determinante der linearen Formen $y_1, \ldots, y_n$ ist, so hat die Determinante $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ der transformirten Form zu der Determinante $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ der gegebenen Form das Verhältniss ε^2 (§. 6, 5).

12. Bei allen Ausdrücken einer gegebenen ordinären quadratischen Form von n Variablen durch n Quadrate ergiebt sich d i e s e l b e A n z a h l Q u a d r a t e e i n e s Z e i c h e n s*). Es sei z. B.

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 y_1{}^2 + \alpha_2 y_2{}^2 + \alpha_3 y_3{}^2 + \alpha_4 y_4{}^2 \\ &= \beta_1 z_1{}^2 + \beta_2 z_2{}^2 + \beta_3 z_3{}^2 + \beta_4 z_4{}^2 \end{aligned}$$

so dass sowohl $y_1, \ldots, y_4$, also auch $z_1, \ldots, z_4$ lineare Formen von $x_1, \ldots, x_4$ mit realen Coefficienten sind, deren Determinanten nicht verschwinden. Unter den Coefficienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ sei einer z. B. α_4 negativ, die übrigen seien positiv: dann ist unter den Coefficienten $\beta_1, \ldots, \beta_4$ einer negativ, die übrigen sind positiv. Wären z. B. β_3 und β_4 negativ, so hätte

$$\alpha_1 y_1{}^2 + \alpha_2 y_2{}^2 + \alpha_3 y_3{}^2 + \alpha_4 y_4{}^2 - \beta_1 z_1{}^2 - \beta_2 z_2{}^2 - \beta_3 z_3{}^2 - \beta_4 z_4{}^2$$

weniger als 4 negative Glieder. Dem System

$$(y_4 = 0,\ z_1 = 0,\ z_2 = 0)$$

genügen x_1, x_2, x_3, x_4, die nicht alle null sind. Die diesen Werthen entsprechenden y_1, y_2, y_3, z_3, z_4 sind nicht alle null, weil

$$\det(y_1, \ldots, y_4) \quad \text{und} \quad \det(z_1, \ldots, z_4)$$

nicht null sind (§. 8, 2). Also ist

$$\alpha_1 y_1{}^2 + \alpha_2 y_2{}^2 + \alpha_3 y_3{}^2 - \beta_3 z_3{}^2 - \beta_4 z_4{}^2$$

positiv, nicht null, gegen die Voraussetzung.

---

*) Sylvester hat diesen Satz entdeckt und unter dem Namen »Trägheitsgesetz der quadratischen Formen« bekannt gemacht Philos. Mag. 1852, II p. 140 und 1853 p. 481. Jacobi hat denselben Satz 1847 gekannt aber nicht veröffentlicht. Vergl. den nachgelassenen Aufsatz Jacobi's Crelle J. 53 p. 275 nebst den Mittheilungen von Hermite und Borchardt a. a. O. p. 271 und 281. Durch Beziehungen zwischen den Coefficienten α und β ist der Beweis von Brioschi geführt worden Nouv. Ann. 1856 Juli.

Demnach hat man unter den ordinären quadratischen Formen von $2m$ und von $2m+1$ Variablen diejenigen in eine Species zu vereinen, welche durch Quadrate ausgedrückt werden, von denen k eines Zeichens, die übrigen anderes Zeichens sind; entsprechend der Anzahl $k = 0, 1, .., m$ giebt es $m+1$ Species, abwechselnd mit positiven und mit negativen Determinanten, z. B. 2 Species binärer und ternärer, 3 Species quaternärer und quinärer quadratischer Formen, u. s. w. Die Formen erster Species sind von Gauss Disq. arithm. 271 definit (unfähig im realen Gebiet das Zeichen zu wechseln, also entweder positiv oder negativ), alle andern Formen ohne Unterschied indefinit genannt worden.

Anmerkung. Wenn $y_1, .., y_4$ lineare Formen der $x_1, .., x_4$ sind, so sind die Figuren der entsprechenden Puncte y und x collinear (homographisch). Aus dem Obigen folgt nun, dass man die ordinären Linien 2ter Ordnung in 2 Species, imaginäre, reale (Ellipse, Hyperbel, Parabel), die ordinären Flächen 2ter Ordnung in 3 Species, imaginäre, elliptische (Ellipsoid, Hyperboloid, Paraboloid), hyperbolische (Hyperboloid, Paraboloid) zu vertheilen hat, dergestalt dass zwei Linien oder Flächen derselben Species collineare Figuren sind. Vergl. Möbius baryc. Calc. p. 314. Jacobi a. a. O. p. 280.

13. Wenn bei den Werthen $x_1 = c_1, .., x_n = c_n$, unter denen einer z. B. c_n nicht null ist, die Form $u = 0$ wird, so ist sie entweder indefinit oder singulär*).

Beweis. Durch die Substitution

$$x_1 = c_1 \frac{x_n}{c_n} + y_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = c_{n-1} \frac{x_n}{c_n} + y_{n-1}$$

erhält man

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = \Sigma a_{ik} \left(c_i \frac{x_n}{c_n} + y_i\right)\left(c_k \frac{x_n}{c_n} + y_k\right)$$

$$= \frac{x_n^2}{c_n^2} \Sigma a_{ik} c_i c_k + 2 \frac{x_n}{c_n} \Sigma a_{ik} c_i y_k + \Sigma a_{ik} y_i y_k$$

*) Kronecker Monatsbericht der Berl. Acad. 1868 p. 339.

Davon ist das erste Glied $= 0$ nach der Voraussetzung. Wenn es nun Werthe $y_1, \ldots, y_{n-1}$ giebt, bei denen $\Sigma a_{ik} c_i y_k$ nicht verschwindet, so kann man den Werth von x_n so verändern, dass die Form Werthe von entgegengesetzten Zeichen erhält. Wenn aber $\Sigma a_{ik} c_i y_k$ bei allen Werthen $y_1, \ldots, y_{n-1}$ verschwindet, so hängt die gegebene Form von nicht mehr als $n-1$ Variablen ab; in der That verschwinden nicht nur die Summen $\Sigma a_{i1} c_i, \ldots, \Sigma a_{i,n-1} c_i$, sondern in Folge der Voraussetzung $\Sigma a_{ik} c_i c_k = 0$ ist auch $\Sigma a_{in} c_i = 0$, also verschwindet $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$.

Man schliesst hiernach, dass die ordinäre Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ definit nicht sein kann, wenn die Coefficienten $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ nicht alle von Null verschieden und nicht alle eines Zeichens sind.

14. Wenn man aus zwei gegebenen ordinären quadratischen Formen derselben Variablen

$$\varphi = \Sigma a_{ik} x_i x_k, \qquad \psi = \Sigma b_{ik} x_i x_k$$

mittelst willkürlicher Multiplicatoren die Form $u\varphi + v\psi$ und insbesondere die Formen

$$\varphi' = u_1 \varphi + v_1 \psi, \qquad \psi' = u_2 \varphi + v_2 \psi$$

componirt, so können alle Formen $u\varphi + v\psi$ auch durch $u'\varphi' + v'\psi'$ ausgedrückt werden. Dazu sind die Bedingungen

$$u_1 u' + u_2 v' = u, \qquad v_1 u' + v_2 v' = v$$

erforderlich und hinreichend.

Wenn die Determinante der Form $u\varphi + v\psi$

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \Sigma \pm (u a_{11} + v b_{11}) \ldots (u a_{nn} + v b_{nn}) \\ &= (u v_1 - u_1 v) \ldots (u v_n - u_n v) \, \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn} \end{aligned}$$

einen complexen Divisor hat, d. h. wenn die Gleichung $f(u, v) = 0$ eine complexe Wurzel hat, so sind alle ordinären Formen $u\varphi + v\psi$ indefinit*).

Beweis. Es seien u_1 und u_2, v_1 und v_2 conjugirt complexe Zahlen, und $u_1 \varphi + v_1 \psi$, $u_2 \varphi + v_2 \psi$ Formen mit verschwin-

*) Kronecker a. a. O. Vergl. unten §. 14, 13.

dender Determinante, mithin von weniger als n Variablen und darstellbar durch weniger als n Quadrate z. B.

$$(y_1+iz_1)^2+\ldots+(y_{n-1}+iz_{n-1})^2 = \Sigma(y_r^2-z_r^2)+2i\Sigma y_r z_r$$

in denen i eine Wurzel der negativen Einheit, $y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots$ reale lineare Formen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ bedeuten. Dann sind

$$\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)\varphi+\tfrac{1}{2}(v_1+v_2)\psi = \Sigma(y_r^2-z_r^2)$$

$$\frac{1}{2i}(u_1-u_2)\varphi+\frac{1}{2i}(v_1-v_2)\psi = 2\Sigma y_r z_r$$

zwei Formen, aus denen, wie oben bemerkt, alle Formen $u\varphi+v\psi$ durch

$$u'\Sigma(y_r^2-z_r^2)+2v'\Sigma y_r z_r$$

dargestellt werden können. Nun ist

$$u'y^2+2v'yz-u'z^2 = \frac{1}{u'}(u'y+v'z)^2-\frac{1}{u'}(u'^2+v'^2)z^2$$

$$= (u'y+wz)\left(y-\frac{u'}{w}z\right)$$

wenn $v'+\sqrt{u'^2+v'^2}=w$ und demnach $v'-\sqrt{u'^2+v'^2}=-\frac{u'^2}{w}$ gesetzt wird. Jede unter den Formen

$$\Sigma(u'y_r+wz_r)\left(y_r-\frac{u'}{w}z_r\right)$$

verschwindet aber, wenn $x_1, \ldots, x_n$ den $n-1$ linearen Gleichungen $u'y_r+wz_r=0$ genügen, und ist indefinit unter der Voraussetzung, dass ihre Determinante nicht verschwindet (13).

Umgekehrt schliesst man: Wenn unter allen ordinären Formen $u\varphi+v\psi$ eine definit ist, so hat die Gleichung $f(u, v)=0$ lauter reale Wurzeln*).

15. Zufolge der Identität

$$u\varphi+v\psi = \frac{uv_k-u_kv}{v_k}\varphi+\frac{u_k\varphi+v_k\psi}{v_k}v$$

kann die Form $u\varphi+v\psi$ mittelst der Divisoren ihrer Determinante durch Quadrate linearer Formen dargestellt werden, in

*) Weierstrass Berl. Monatsbericht 1858 p. 213.

Betracht dass $u_k\varphi + v_k\psi$ eine Form von weniger als n Variablen ist*).

Wenn φ eine positive Form ist, so hat die Determinante von $u\varphi + v\psi$ nur reale Divisoren $uv_k - u_k v$ (14). Die Form $u_k\varphi + v_k\psi$ kann durch $n-1$ Variable $y_2, .., y_n$ ausgedrückt werden. Die Form φ kann durch $y_2, .., y_n$ und eine andre Variable ausgedrückt werden, wobei die Quadrate der Variablen positive Coefficienten haben (13). Man kann demnach von φ das Quadrat einer linearen Form aller Variablen ablösen, so dass eine Form der $y_2, .., y_n$ übrig bleibt (11), und man erhält

$$u\varphi + v\psi = \frac{uv_k - u_k v}{v_k} z^2 + u\varphi' + v\psi'$$

Hierbei ist φ' wiederum eine positive Form, daher kann man die Form $u\varphi' + v\psi'$ der Variablen $y_2, .., y_n$ auf dieselbe Art zertheilen, u. s. w. Ein linearer Divisor der Determinante von $u\varphi' + v\psi'$ ist zugleich ein Divisor der Determinante von $u\varphi + v\psi$, weil beim Verschwinden jener Determinante auch diese verschwindet (10). Also findet man

$$u\varphi + v\psi = \frac{uv_1 - u_1 v}{v_1} z_1^2 + .. + \frac{uv_n - u_n v}{v_n} z_n^2$$

folglich

$$\varphi = z_1^2 + .. + z_n^2$$

$$-\psi = \frac{u_1}{v_1} z_1^2 + .. + \frac{u_n}{v_n} z_n^2$$

Unter der Voraussetzung, dass auch ψ eine positive Form, sind alle Wurzeln $u_1 : v_1, ..$ der Gleichung $f(u, v) = 0$ negativ.

Wenn demnach unter den ordinären quadratischen Formen $u\varphi + v\psi$ der n Variablen x eine definit ist, so kann die Form $u\varphi + v\psi$ bei allen $u : v$ als lineare Form der Quadrate von n linearen Formen der x dargestellt werden. Die Coefficienten der Quadrate sind die n linearen Formen $uv_1 - u_1 v, ..,$ durch welche $\det(u\varphi + v\psi)$ theilbar ist. Die vorstehende von Kron-

*) Kronecker Briefl. Mittheilung 1867 und Berl. Monatsbericht 1868 p. 339. Vergl. Kronecker Schaaren quadratischer Formen, Berl. Monatsbericht 1874 Jan. Febr. März.

ECKER angegebene Entwickelung ist frei von der Voraussetzung, dass die Divisoren der Determinante $uv_1 - u_1 v$, .. alle von einander verschieden sind.

Wenn unter den ordinären Formen $u\varphi + v\psi$ keine definit ist, so ist, wie KRONECKER a. a. O. ausgeführt hat, die gleiche Entwickelung zulässig unter der Voraussetzung, dass die Divisoren der Determinante real und alle von einander verschieden sind.

16. Unter einer STURM'schen Reihe wird eine Reihe von Gliedern verstanden, welche durch die in ihr vorhandenen Zeichenwechsel reale Wurzeln einer gegebenen algebraischen Gleichung anzeigt*). JACOBI und HERMITE haben quadratische Formen angegeben, bei denen die Zählung der positiven und der negativen Quadrate, durch welche sie dargestellt werden können, denselben Dienst leistet, wie die Betrachtung einer STURM'schen Reihe.

Aus den von einander verschiedenen Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m$ der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$, einem gegebenen realen Werth ω und den Unbestimmten $x_0, x_1, .., x_{m-1}$ bilde man die Summe

$$H = \Sigma(\omega - \alpha)(x_0 + x_1\alpha + .. + x_{m-1}\alpha^{m-1})^2$$

indem man für α die Wurzeln $\alpha_1, .., \alpha_m$ setzt. Jeder realen unter (über) der Grenze ω liegenden Wurzel entspricht ein positives (negatives) Quadrat der Summe H. Jedem Paar con-

*) Der nach STURM benannte Lehrsatz ist von demselben der Pariser Academie 1829 Mai 13 (Férussac Bulletin XI p. 410, Choquet et Mayer Algèbre 1832) und Mém. prés. 1835 tom. 6 mitgetheilt worden. Vergl. MOIGNO Liouv. J. 5 p. 75. Die allgemeine Aufstellung einer Sturm'schen Reihe verdankt man SYLVESTER (Philos. Mag. 1839 Dec.), dessen Angaben von STURM (Liouv. J. 7 p. 356) bewiesen, von CAYLEY (Liouv. J. 11 p. 297. 13 p. 269) und JOACHIMSTHAL (Crelle J. 48 p. 386) erweitert wurden. Die zur Vertretung einer Sturm'schen Reihe dienende quadratische Form ist von HERMITE Compt. rend. 1853, I p. 294 aufgestellt worden, weniger umfassend bereits von JACOBI 1847, wie aus einer Mittheilung von BORCHARDT Crelle J. 53 p. 281 hervorgeht. Vergl. SYLVESTER Philos. Trans. 1853 p. 484, BRIOSCHI Nouv. Ann. 1856 Juli und die Monographie HATTENDORF über die Sturm'schen Functionen, Göttingen 1862.

jugirt complexer Wurzeln entspricht ein positives und ein negatives Quadrat der Summe H, weil

$$(\beta+\gamma\sqrt{-1})(P+Q\sqrt{-1})^2+(\beta-\gamma\sqrt{-1})(P-Q\sqrt{-1})^2$$
$$=\frac{2}{\beta}\left\{(\beta P-\gamma Q)^2-(\beta^2+\gamma^2)Q^2\right\}$$

Also wird die Anzahl der verschiedenen realen unter (über) der Grenze ω liegenden Wurzeln gefunden, indem man die Anzahl der positiven (negativen) Quadrate in der Summe H um die Anzahl der verschiedenen Paare von complexen Wurzeln vermindert. Die Anzahl der verschiedenen realen zwischen den Grenzen ω und ω' liegenden Wurzeln ergiebt sich darnach unabhängig von der Anzahl der complexen Wurzeln.

In der Summe H hat $x_i x_k$ den Coefficienten

$$t_{ik}=\Sigma(\omega-\alpha)\alpha^{i+k}=\omega s_{i+k}-s_{i+k+1}$$

wenn man durch s_r die Summe der $r$ten Potenzen der Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ bezeichnet. Die Grössen s_r sind real und werden aus der Differenz der Quotienten $f'(x):f(x)$ und $\varphi'(x):\varphi(x)$ berechnet (§. 10, 6), indem man unter $\varphi(x)$ den Divisor versteht, welchen $f'(x)$ mit $f(x)$ in dem Falle gemein hat, dass die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ nicht alle von einander verschieden sind (§. 11, 20). Demnach ist $H=\Sigma t_{ik}x_i x_k$ eine quadratische Form mit realen Coefficienten, deren Glieder dadurch gebildet werden, dass man für i und k alle Nummern von 0 bis $m-1$ setzt, und welche durch je eine bestimmte Anzahl von positiven und negativen Quadraten darstellbar ist (12). Die Determinante $T_{m-1}=\Sigma\pm t_{00}\ldots t_{m-1,m-1}$ und die Subdeterminanten $T_{m-2}, T_{m-3}, \ldots$ können nach §. 10, 5 berechnet werden.

Anmerkung. Zu dem angegebenen Zwecke hat Hermite *) die symmetrische Function

$$G(x,y)=\frac{(y-\omega)f(x)f'(y)-(x-\omega)f(y)f'(x)}{y-x}$$

*) Crelle J. 52 p. 43. Serret Algèbre sup. 1866 t. 1 p. 581. Vergl. Kronecker über die Sturm'schen Reihen, Berl. Monatsbericht 1873 Febr.

aufgestellt und in die Summe $\Sigma h_{ik} x^i y^k$ entwickelt, deren Exponenten im Allgemeinen von 0 bis $n-1$ steigen. Zugleich ist

$$G(x, y) = \frac{f(x)f(y)}{y-x}\left\{(y-\omega)\frac{f'(y)}{f(y)} - (x-\omega)\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Sigma\frac{1}{x-\alpha}, \qquad \frac{y-\omega}{y-\alpha} - \frac{x-\omega}{x-\alpha} = \frac{(y-x)(\omega-\alpha)}{(x-\alpha)(y-\alpha)}$$

$$G(x, y) = \Sigma(\omega-\alpha)\frac{f(x)}{x-\alpha}\frac{f(y)}{y-\alpha}$$

Wenn man in diesen Entwickelungen x^i, y^k durch z_i, z_k ersetzt, so erhält man einerseits die quadratische Form $\Sigma h_{ik} z_i z_k$, andrerseits die quadratische Form

$$\Sigma(\omega-\alpha)(x_0 + x_1\alpha + \ldots + x_{n-1}\alpha^{n-1})^2$$

wobei x_0, x_1, .. lineare Functionen der z_1, z_2, .. sind. Die Anzahlen der positiven und der negativen Quadrate, durch welche diese letztre Form sich darstellen lässt, werden durch Bearbeitung der Form $\Sigma h_{ik} z_i z_k$ erkannt, deren Coefficienten ganze Functionen der Coefficienten von $f(x)$ sind.

§. 14. Die linearen, insbesondere die orthogonalen Substitutionen.

1. Wenn eine oder mehrere Functionen der Variablen x_1, x_2, .., x_n durch die linearen Substitutionen

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n \\ &\;\;\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n \end{aligned}$$

in Functionen der Variablen y_1, y_2, .., y_n transformirt werden, so wird die Determinante der Substitutionscoefficienten

$$\det(x_1, .., x_n) = \Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn}$$

die Determinante (modulus) der linearen Substitution genannt. Dieselbe muss von Null verschieden sein, wenn x_1, x_2, .., x_n als unabhängig von einander vorausgesetzt werden

(§. 8, 1). Die lineare Substitution heisst **unimodular***), wenn ihre Determinante = 1 ist.

2. Wenn die linearen Formen $f_1, f_2, .., f_n$ der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ durch eine lineare Substitution in Formen der Variablen $y_1, y_2, .., y_n$ transformirt werden, so ist die Determinante der transformirten Formen das Product der Determinante der gegebenen Formen mit der Determinante der linearen Substitution**).

Beweis. Es seien

$$f_1 = a_{11}x_1 + .. + a_{1n}x_n$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f_n = a_{n1}x_1 + .. + a_{nn}x_n$$

die gegebenen linearen Formen. Durch die lineare Substitution

$$x_1 = b_{11}y_1 + .. + b_{1n}y_n$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$x_n = b_{n1}y_1 + .. + b_{nn}y_n$$

erhält man die transformirten Formen

$$f_1 = c_{11}y_1 + .. + c_{1n}y_n$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f_n = c_{n1}y_1 + .. + c_{nn}y_n$$

worin c_{ik} gefunden wird, indem man $x_1, x_2, .., x_n$ der Reihe nach mit $a_{i1}, a_{i2}, .. a_{in}$ multiplicirt, die Producte addirt und in der Summe den Coefficienten y_k aufsucht:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + .. + a_{in}b_{nk}$$

Nach §. 6, 1 ist

$$\Sigma \pm c_{11} .. c_{nn} = \Sigma \pm a_{11} .. a_{nn} \Sigma \pm b_{11} .. b_{nn}$$

---

*) SYLVESTER Cambr. and Dubl. math. J. 7 p. 52. Ueber die Construction solcher Determinanten vergl. den oben (§. 3, 11) citirten Aufsatz von HERMITE.

**) JACOBI Crelle 12 p. 41. Vergl. den algebraischen Beweis der Multiplicationsregel (§. 6), z. B. JOACHIMSTHAL Crelle J. 40 p. 22. Die weitere Ausführung dieses Satzes ist oben §. 6, 9 gegeben worden.

Anmerkung. Wenn überhaupt die Functionen $f_1, .., f_n$ der Variablen $x_1, .., x_n$ durch eine lineare Substitution in Functionen der Variablen $y_1, .., y_n$ transformirt worden sind, so ist die Functionaldeterminante des transformirten Systems das Product der Functionaldeterminante des gegebenen Systems mit der Determinante der Substitution. Nach §. 12, 6, I ist nämlich

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial y_1} .. \frac{\partial f_n}{\partial y_n} = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} .. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial y_1} .. \frac{\partial x_n}{\partial y_n}$$

Nun ist $\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = b_{ik}$, folglich u. s. w.

3. Wenn die Function f der Variablen $x_1, .., x_n$ durch die lineare Substitution (1) in eine Function der Variablen $y_1, .., y_n$ transformirt worden ist, so ist die (Hesse'sche) Determinante H' der zweiten Differentialquotienten der transformirten Function das Product derselben Determinante H der gegebenen Function mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante B*). Nach (2) hat man

$$\Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_1} .. \frac{\partial^2 f}{\partial y_n \partial y_n} = \Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial x_1} .. \frac{\partial^2 f}{\partial y_n \partial x_n} \Sigma \pm b_{11} .. b_{nn}$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1} .. \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial y_n} = \Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} .. \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \Sigma \pm b_{11} .. b_{nn}$$

folglich durch Multiplication $H' = HB^2$.

Anmerkung. Wenn die Function f eine quadratische Form bedeutet, so ist ihre Hesse'sche Determinante H von der Determinante dieser Form nicht verschieden (§. 12, 7). Daher wird die Determinante der transformirten Form gefunden, indem man die Determinante der gegebenen Form mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante multiplicirt (§. 6, 5).

4. Unter der Resultante der binären Formen

$$f(x, y) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} y + ..$$
$$g(x, y) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} y + ..$$

wird die aus den Coefficienten $a_m, a_{m-1}, ..; b_n, b_{n-1}, ..$ gebildete Formel verstanden, welche oben (§. 11, 5) als die Resul-

*) Hesse Crelle J. 28 p. 89.

tante von $f(x, 1)$ und $g(x, 1)$ angegeben worden ist. Wenn man die Functionen durch die lineare Substitution

$$x = \lambda u + \mu v, \qquad y = \lambda' u + \mu' v$$

transformirt hat, so findet man die auf gleiche Weise zu bildende Resultante der transformirten Functionen, indem man die Resultante der gegebenen Functionen mit der mnten Potenz der Substitutionsdeterminante $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ multiplicirt*). Stellt man die gegebenen Functionen durch die Producte

$$a_m(x - \alpha_1 y) \,..\, (x - \alpha_m y) \quad \text{und} \quad b_n(x - \beta_1 y) \,..\, (x - \beta_n y)$$

dar, so ist ihre Resultante

$$R = a_m{}^n b_n{}^m D(\alpha_1, .., \alpha_m \,|\, \beta_1, .., \beta_n)$$

Die Differenz $\beta - \alpha$ ist die Determinante eines Paares von linearen Formen $x - \beta y$ und $x - \alpha y$, und geht durch die angegebene Substitution über in (2)

$$(\beta - \alpha)(\lambda\mu' - \lambda'\mu)$$

Daher geht durch dieselbe Substitution die Resultante R über in

$$R(\lambda\mu' - \lambda'\mu)^{mn}$$

Um die Discriminante der durch die angezeigte Substitution aus $f(x, y)$ entspringenden Function zu finden, hat man die Discriminante der gegebenen Function (§. 11, 19)

$$a_m{}^{2m-2} \Delta(\alpha_1, .., \alpha_m)^2$$

mit der $m(m-1)$ten Potenz der Substitutionsdeterminante zu multipliciren, in Betracht dass $\Delta(\alpha_1, ..)^2$ das Product von $m(m-1)$ Differenzen ist.

Anmerkung. Es giebt hiernach aus einer oder mehrern Formen abgeleitete homogene ganze Formeln von der Eigenschaft, dass ihr Verhältniss zu den Formeln, die auf dieselbe Weise aus den durch eine lineare Substitution transformirten Formen abgeleitet werden, eine Potenz der Substitutionsdeter-

*) Dieser Satz ist in einem umfassenderen Satz Boole's enthalten, welchen Cayley Crelle J. 30 p. 1 anführt. Vergl. Jacobi Crelle J. 40 p. 245. Salmon higher plane curves 1852 p. 295.

minante ist, mithin den Werth 1 hat, wenn man eine lineare Substitution gebraucht, deren Determinante 1 ist. Formeln dieser Art hat Cayley 1846 a. a. O. unter dem Namen Hyperdeterminanten einer Form oder eines Systems von Formen in umfassende Betrachtung gezogen. Man nennt die Hyperdeterminanten nach Sylvester (Philos. Mag. 1851, II p. 396) Covarianten oder Invarianten, je nachdem sie ausser den Coefficienten der Formen auch die Variablen enthalten oder nicht enthalten. Z. B. die Functionaldeterminante R des Systems von Functionen $f_1, .., f_n$ der Variablen $x_1, .., x_n$ ist im Allgemeinen eine Covariante des Systems, weil die Functionaldeterminante des durch eine lineare Substitution, deren Determinante B ist, transformirten Systems den Werth RB hat (2). Wenn das System nur lineare Formen enthält, so ist R nur aus den Coefficienten des Systems zusammengesetzt, also eine Invariante des Systems. Die Hesse'sche Determinante H einer Form höhern als 2ten Grades ist eine Covariante der Form, weil dieselbe Determinante der transformirten Form den Werth HB^2 hat (3). Die Discriminante einer Form ist eine Invariante derselben, und die Resultante von zwei binären Formen ist eine Invariante dieses Systems. Vergl. Salmon Lessons introd. to the modern higher algebra 1859 (deutsch bearb. von Fiedler 1863) und die Abhandlungen von Aronhold Crelle J. 62 p. 281, 69 p. 185, Christoffel Crelle J. 68 p. 246. Clebsch Theorie der binären Formen 1872.

5. Unter den linearen Substitutionen, durch welche man eine gegebene Function transformiren kann, ist besonders eine solche bemerkenswerth, durch welche zugleich die Summe der Quadrate der Variablen in die Summe der Quadrate der neuen Variablen transformirt wird. Diese Substitution ist von Euler (Nov. Comm. Petrop. 15 p. 75, 20 p. 217), Cauchy (Exerc. de Math. 4 p. 140), Jacobi (Crelle J. 12 p. 7), Cayley (Crelle J. 32 p. 119) in Betracht gezogen worden und heisst nach einer Bemerkung des Letztern eine orthogonale Substitution.

Wenn eine Function der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ durch eine lineare (orthogonale) Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1n}y_n \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \ldots + c_{nn}y_n \end{aligned}$$

in eine Function von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zu transformiren ist, dergestalt dass

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

so haben die Coefficienten folgende Haupteigenschaften.

I. Für jedes i und k von 1 bis n ist (Euler)

$$\begin{aligned} c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \ldots + c_{ni}^2 &= 1 \\ c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + \ldots + c_{ni}c_{nk} &= 0 \end{aligned}$$

zufolge der Identität

$$\begin{aligned} & y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \\ = & (c_{11}y_1 + \ldots + c_{1n}y_n)^2 + \ldots + (c_{n1}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n)^2 \\ = & y_1^2(c_{11}^2 + \ldots + c_{n1}^2) + \ldots + 2y_1y_2(c_{11}c_{12} + \ldots + c_{n1}c_{n2}) + \ldots \end{aligned}$$

II. Um die transformirte Function in die gegebene zu transformiren, hat man (Cauchy)

$$y_i = c_{1i}x_1 + c_{2i}x_2 + \ldots + c_{ni}x_n$$

zu substituiren. Denn

$$\begin{aligned} & c_{1i}x_1 + \ldots + c_{ni}x_n \\ = & y_1(c_{1i}c_{11} + \ldots + c_{ni}c_{n1}) + \ldots + y_n(c_{1i}c_{1n} + \ldots + c_{ni}c_{nn}) \end{aligned}$$

worin der Coefficient von y_i den Werth 1 hat, während die Coefficienten der übrigen Grössen verschwinden (I).

III. Das Quadrat der Determinante einer orthogonalen Substitution ist 1 (Jacobi). Denn nach der Multiplicationsregel ist

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ d_{n1} & \ldots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

wo

$$d_{ik} = c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + \ldots + c_{ni}c_{nk}$$

Nun ist $d_{ik} = 0$, $d_{ii} = 1$ (I), folglich reducirt sich die gesuchte Determinante auf ihr Anfangsglied $d_{11}d_{22} \ldots d_{nn} = 1$.

IV. Wenn die Determinante der orthogonalen Substitution durch ε, die Adjuncte von c_{ik} durch γ_{ik} bezeichnet wird, so ist (Jacobi)

$$\gamma_{ik} = \varepsilon c_{ik}$$

Um diese Identität zu finden, multiplicirt man der Reihe nach die Identitäten

$$\begin{array}{c} c_{11}c_{1k} + \ldots + c_{n1}c_{nk} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{1k}c_{1k} + \ldots + c_{nk}c_{nk} = 1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{1n}c_{1k} + \ldots + c_{nn}c_{nk} = 0 \end{array}$$

mit $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{in}$. Durch Summirung erhält man

$$\begin{aligned} c_{1k}(c_{11}\gamma_{i1} + \ldots + c_{1n}\gamma_{in}) + \ldots + c_{ik}(c_{i1}\gamma_{i1} + \ldots + c_{in}\gamma_{in}) \\ + \ldots + c_{nk}(c_{n1}\gamma_{i1} + \ldots + c_{nn}\gamma_{in}) = \gamma_{ik} \end{aligned}$$

Der Coefficient von c_{ik} ist ε, die Coefficienten der übrigen Grössen $c_{1k}, \ldots, c_{nk}$ verschwinden (§. 3, 2).

V. Die Coefficienten der orthogonalen Substitution genügen dem zweiten System von Identitäten (Euler)

$$\begin{array}{l} c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + \ldots + c_{in}^2 = 1 \\ c_{i1}c_{k1} + c_{i2}c_{k2} + \ldots + c_{in}c_{kn} = 0 \end{array}$$

Denn nach (IV) ist

$$\varepsilon(c_{i1}c_{k1} + \ldots + c_{in}c_{kn}) = \gamma_{i1}c_{k1} + \ldots + \gamma_{in}c_{kn}$$

Dieses Aggregat hat aber den Werth ε oder 0, je nachdem i und k gleich oder ungleich sind (§. 3, 2).

VI. Unter den Subdeterminanten des Systems der Coefficienten einer orthogonalen Substitution findet folgender Zusammenhang statt (Jacobi):

$$\begin{vmatrix} c_{m+1,m+1} & \cdot\ \cdot & c_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n,m+1} & \cdot\ \cdot & c_{nn} \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\ \cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot\ \cdot & c_{mm} \end{vmatrix}$$

Denn nach §. 7, 2 hat man

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdot\ \cdot & \gamma_{1m} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \gamma_{m1} & \cdot\ \cdot & \gamma_{mm} \end{vmatrix} = \varepsilon^{m-1} \begin{vmatrix} c_{m+1,m+1} & \cdot\ \cdot & c_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n,m+1} & \cdot\ \cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

und nach (IV)

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdot & \cdot & \gamma_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{m1} & \cdot & \cdot & \gamma_{mm} \end{vmatrix} = \varepsilon^m \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot & \cdot & c_{mm} \end{vmatrix}$$

Durch Vergleichung dieser Identitäten ergiebt sich die behauptete Identität.

Noch einige weniger nahe liegende Relationen zwischen den Coefficienten einer orthogonalen Substitution haben Euler in der zuerst erwähnten Abhandlung und Jacobi Crelle J. 30 p. 46 angegeben. Vergl. Hesse Crelle J. 57 p. 175.

Anmerkung. Eine lineare Substitution, durch welche die Form

$$x_1^2 + \ldots + x_i^2 - x_{i+1}^2 - \ldots - x_n^2$$

in die Form

$$y_1^2 + \ldots + y_i^2 - y_{i+1}^2 - \ldots - y_n^2$$

verwandelt werden soll, kann aus einer orthogonalen Substitution abgeleitet werden, durch welche man die Form

$$x_1^2 + \ldots + x_i^2 + y_{i+1}^2 + \ldots + y_n^2$$

in die Form

$$y_1^2 + \ldots + y_i^2 + x_{i+1}^2 + \ldots + x_n^2$$

überführt. Mittelst der für $y_{i+1}, \ldots, y_n$ zu machenden Substitutionen werden dann die Variablen $x_{i+1}, \ldots, x_n$ durch $y_1, \ldots, y_n$ ausgedrückt. Jacobi Crelle J. 53 p. 278.

6. Da die n^2 Coefficienten einer orthogonalen Substitution $\frac{1}{2}n(n+1)$ Gleichungen (5, I) zu genügen haben, so lassen sie sich als Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Grössen

$$\begin{array}{cccc} b_{12} & b_{13} & \cdot\ \cdot & b_{1n} \\ & b_{23} & \cdot\ \cdot & b_{2n} \\ & & \cdot\ \cdot & \cdot \\ & & & b_{n-1,n} \end{array}$$

betrachten. In der That hat Euler nicht nur den Weg angezeigt, wie man durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ binäre Transformationen die Coefficienten einer orthogonalen Substitution als Functionen von

$\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Grössen darstellen könne, sondern er hat auch in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ diese Coefficienten durch die unbestimmten Grössen rational ausgedrückt. Mit Hülfe der Determinanten ist es Cayley (l. c.) gelungen, bei n Variablen die Coefficienten einer orthogonalen Substitution als rationale Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Grössen darzustellen.

Wenn nämlich durch $b_{12}, \ldots, b_{n-1,n}$ unbestimmte Grössen bezeichnet werden, wenn man unter den Voraussetzungen

$$b_{ik} + b_{ki} = 0, \qquad b_{11} = b_{22} = \ldots = \omega$$

die Determinante

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

bildet, und die Adjuncte von b_{ik} durch β_{ik} bezeichnet, so sind

$$c_{ik} = \frac{2\omega\beta_{ik}}{B}, \qquad c_{ii} = \frac{2\omega\beta_{ii} - B}{B}$$

die Coefficienten einer orthogonalen Substitution, deren Determinante den Werth 1 hat. Die Coefficienten einer orthogonalen Substitution mit der Determinante -1 erhält man, indem man im System der gefundenen Coefficienten bei einer ungeraden Anzahl paralleler Reihen die Zeichen ändert.

Beweis. Wenn man bei $i = 1, 2, \ldots, n$ zugleich

$$x_i = b_{1i} z_1 + \ldots + b_{in} z_n$$
$$y_i = b_{i1} z_1 + \ldots + b_{ni} z_n$$

setzt, so findet man aus den beiden linearen Systemen nach §. 8, 1

$$Bz_i = \beta_{1i} x_1 + \beta_{2i} x_2 + \ldots + \beta_{ni} x_n$$
$$Bz_i = \beta_{i1} y_1 + \beta_{i2} y_2 + \ldots + \beta_{in} y_n$$

Nun ist nach den Voraussetzungen $b_{ik} + b_{ki} = 0$, $b_{ii} = \omega$

$$x_i + y_i = 2\omega z_i$$

folglich hat man zugleich

$$By_i = 2\omega\beta_{1i}x_1 + \ldots + (2\omega\beta_{ii} - B)x_i + \ldots + 2\omega\beta_{ni}x_n$$
$$Bx_i = 2\omega\beta_{i1}y_1 + \ldots + (2\omega\beta_{ii} - B)y_i + \ldots + 2\omega\beta_{in}y_n$$

oder abgekürzt

$$y_i = c_{1i}x_1 + \ldots + c_{ni}x_n$$
$$x_i = c_{i1}y_1 + \ldots + c_{in}y_n$$

Demnach ist identisch

$$y_i = c_{1i}(c_{11}y_1 + \ldots + c_{1n}y_n) + \ldots + c_{ni}(c_{n1}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n)$$

folglich

$$c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \ldots + c_{ni}^2 = 1$$
$$c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + \ldots + c_{ni}c_{nk} = 0$$
$$y_1^2 + \ldots + y_n^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

Dabei ist $\sum\limits_r \beta_{ir}b_{kr} = 0$, $\sum\limits_r \beta_{ir}b_{ir} = B$, und indem man diess durch c ausdrückt,

$$\sum_r c_{ir}b_{kr} = b_{ik}$$

Mithin ist $\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{nn} \Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn} = \Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn}$ nach §. 6, 1, also

$$\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{nn} = 1$$

Ferner hat man*) $\sum\limits_r \beta_{ir}b_{\lambda r} + \sum\limits_r \beta_{ir}b_{r\lambda} = 2\beta_{i\lambda}b_{\lambda\lambda}$, d. i.

$$Bc_{i\lambda} = \sum_r \beta_{ir}b_{r\lambda} \qquad \sum_\lambda Bc_{i\lambda}\beta_{k\lambda} = \sum_{r,\lambda} \beta_{ir}\beta_{k\lambda}b_{r\lambda}$$

Nun ist $\sum\limits_\lambda \beta_{k\lambda}b_{r\lambda} = B$ bei $r = k$, null bei den andern r, folglich

$$\sum_\lambda c_{i\lambda}\beta_{k\lambda} = \beta_{ik}$$

$$\text{d. i.} \quad \sum_\lambda c_{i\lambda}c_{k\lambda} = 0, \qquad \sum_\lambda c_{i\lambda}^2 = 1$$

Dass die Determinante ε dieser orthogonalen Substitution den Werth 1 (nicht -1) hat, erkennt man durch Bildung des Products εB^{n+1} d. i.

---

*) Bemerkung des Herrn Pasch 1879.

$$\left|\begin{array}{cccc} 2\omega\beta_{11}-B & 2\omega\beta_{12} & 2\omega\beta_{13} & . \\ 2\omega\beta_{21} & 2\omega\beta_{22}-B & 2\omega\beta_{23} & . \\ 2\omega\beta_{31} & 2\omega\beta_{32} & 2\omega\beta_{33}-B & . \\ . & . & . & . \end{array}\right| \left|\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & . \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & . \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & . \\ . & . & . & . \end{array}\right|$$

Weil nach §. 3, 2

$$\begin{array}{l} 2\omega\beta_{i1}b_{k1} + \ldots + (2\omega\beta_{ii}-B)b_{ki} + \ldots + 2\omega\beta_{in}b_{kn} = Bb_{ik} \\ 2\omega\beta_{i1}b_{i1} + \ldots + (2\omega\beta_{ii}-B)b_{ii} + \ldots + 2\omega\beta_{in}b_{in} = Bb_{ii} \end{array}$$

ist, so hat das Product (§. 6, 4) den Werth B^{n+1}, folglich ist $\varepsilon = 1$.

Wenn man endlich die Coefficienten

$$c_{1i},\ c_{2i},\ \ldots,\ c_{ni} \quad \text{oder} \quad c_{k1},\ c_{k2},\ \ldots,\ c_{kn}$$

mit den entgegengesetzten Zeichen versieht, so wechselt die Determinante der Substitution ihr Zeichen, während die characteristischen Gleichungen (5, I. V)

$$\begin{array}{l} c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \ldots + c_{ni}^2 = 1 \\ c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + \ldots + c_{ni}c_{nk} = 0 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{l} c_{k1}^2 + c_{k2}^2 + \ldots + c_{kn}^2 = 1 \\ c_{k1}c_{i1} + c_{k2}c_{i2} + \ldots + c_{kn}c_{in} = 0 \end{array}$$

keine Veränderung erleiden.

Beispiele. Für $n = 2$ findet man

$$B = \left|\begin{array}{cc} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{array}\right| = 1 + \lambda^2$$

Das adjungirte System ist

$$\begin{array}{cc} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{array}$$

Daher sind die Coefficienten einer binären orthogonalen Substitution von der Determinante 1 folgende:

$$\begin{array}{cc} \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} & \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\ -\dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2} & \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{array}$$

Die orthogonale Substitution

$$\begin{matrix} \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} & \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\ \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} & -\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{matrix}$$

hat die Determinante -1.

Für $n = 3$ findet man (§. 5, 9)

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

Das adjungirte System ist

$$\begin{matrix} 1+\lambda^2 & \nu + \lambda\mu & -\mu + \lambda\nu \\ -\nu + \lambda\mu & 1 + \mu^2 & \lambda + \mu\nu \\ \mu + \lambda\nu & -\lambda + \mu\nu & 1 + \nu^2 \end{matrix}$$

Demnach findet man folgende Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution von der Determinante 1:

$$\begin{matrix} \frac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{B} & 2\frac{\nu+\lambda\mu}{B} & 2\frac{-\mu+\lambda\nu}{B} \\ 2\frac{-\nu+\lambda\mu}{B} & \frac{1+\mu^2-\nu^2-\lambda^2}{B} & 2\frac{\lambda+\mu\nu}{B} \\ 2\frac{\mu+\lambda\nu}{B} & 2\frac{-\lambda+\mu\nu}{B} & \frac{1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2}{B} \end{matrix}$$

wie schon Euler in der zuerst erwähnten Abhandlung p. 101 angegeben hat. Diese Coefficienten sind von Rodrigues (Liouv. J. 5 p. 405) aus denselben Formeln abgeleitet worden, welche Euler (Nov. Comm. Petrop. 20 p. 217) zur Transformation eines dreirechtwinkeligen Coordinatensystems aufgestellt hatte. Um die Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution von der Determinante -1 zu erhalten, braucht man nur in dem obigen System die Zeichen von einer oder drei Zeilen oder von eben so viel Colonnen zu verändern.

Für $n = 4$ findet man

$$B = \begin{vmatrix} \omega & a & b & c \\ -a & \omega & h & -g \\ -b & -h & \omega & f \\ -c & g & -f & \omega \end{vmatrix} = (\omega^2 + a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2 + \vartheta^2)\omega^2$$

$$\omega\vartheta = af + bg + ch$$

$$\begin{array}{llll}
\beta_{11} = & (\omega^2 + f^2 + g^2 + h^2)\omega & \beta_{12} = & (a\omega + f\vartheta - bh + cg)\omega \\
\beta_{21} = & (-a\omega - f\vartheta + cg - bh)\omega & \beta_{22} = & (\omega^2 + f^2 + b^2 + c^2)\omega \\
\beta_{31} = & (-b\omega - cf - g\vartheta + ah)\omega & \beta_{32} = & (-h\omega + fg - ab + c\vartheta)\omega \\
\beta_{41} = & (-c\omega + bf - ag - h\vartheta)\omega & \beta_{42} = & (g\omega + fh + b\vartheta - ca)\omega
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\beta_{13} = & (b\omega + g\vartheta - cf + ah)\omega & \beta_{14} = & (c\omega + h\vartheta - ag + bf)\omega \\
\beta_{23} = & (h\omega + fg + c\vartheta - ab)\omega & \beta_{24} = & (-g\omega + hf - ac - b\vartheta)\omega \\
\beta_{33} = & (\omega^2 + g^2 + c^2 + a^2)\omega & \beta_{34} = & (f\omega + gh + a\vartheta - bc)\omega \\
\beta_{43} = & (-f\omega + gh - bc - a\vartheta)\omega & \beta_{44} = & (\omega^2 + h^2 + a^2 + b^2)\omega
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
Bc_{11} &= [\omega^2 - \vartheta^2 + f^2 - a^2 + g^2 - b^2 + h^2 - c^2\,]\,\omega^2 \\
Bc_{22} &= [\omega^2 - \vartheta^2 + f^2 - a^2 - (g^2 - b^2) - (h^2 - c^2)]\,\omega^2 \\
Bc_{33} &= [\omega^2 - \vartheta^2 - (f^2 - a^2) + (g^2 - b^2) - (h^2 - c^2)]\,\omega^2 \\
Bc_{44} &= [\omega^2 - \vartheta^2 - (f^2 - a^2) - (g^2 - b^2) + (h^2 - c^2)]\,\omega^2
\end{aligned}$$

u. s. w. Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich ohne Weiteres die Coefficienten einer quaternären orthogonalen Substitution von der Determinante 1 oder -1 aufstellen.

Cayley's System dieser Coefficienten in Crelle J. 32 p. 122 enthält zwei Fehler (in β_{24} steht $-hf$ statt hf, in Bc_{11}, Bc_{22},.. steht 1 statt $1 - \vartheta^2$), welche in der neueren Mittheilung Cayley's Crelle J. 50 p. 311 nicht vorkommen. Dagegen ist an dem zuletzt erwähnten Orte p. 312 Z. 5 v. o. der Druckfehler $+\delta\gamma'$ in $-\delta\gamma'$ zu verbessern. Die von Cayley gefundenen Coefficienten einer quaternären orthogonalen Substitution kommen in anderer Form bei Euler (Nov. Comm. Petrop. 15 p. 102) vor, der sie »nulla certa methodo, sed potius quasi divinando« erhalten hatte. Euler fügt hinzu: »si quis viam directam ad hanc solutionem manuducentem investigaverit, insignia certe subsidia analysi attulisse erit censendus.« Es ist Cayley nicht entgangen, wie sich aus den von ihm aufgestellten Coefficienten die Euler'sche Lösung ableiten lässt (vergl. Crelle J. 50 p. 312). Setzt man im obigen System

$$\omega = -\frac{s+d}{2}, \quad f = \frac{r+c}{2}, \quad g = -\frac{q+b}{2}, \quad h = \frac{p+a}{2}$$

$$\vartheta = \frac{s-d}{2}, \quad a = \frac{r-c}{2}, \quad b = -\frac{q-b}{2}, \quad c = \frac{p-a}{2}$$

und ändert man die Zeichen der letzten Horizontalreihe, wodurch die Determinante der orthogonalen Substitution den Werth -1

annimmt, so erhält man EULER's System ohne irgend eine Abweichung. Denn das zweite Element der zweiten Zeile enthält bei EULER nur durch einen Druckfehler $-ds$ statt $+ds$.

7. Die binäre und ternäre orthogonale Substitution ist in der Geometrie gleichbedeutend mit der Transformation der orthogonalen Punctcoordinaten. Um von dem orthogonalen System x, y zu dem orthogonalen System x', y' überzugehen, unter der Voraussetzung, dass x, y, x', y' Richtungen einer Ebene sind, hat man die lineare Substitution zu machen, deren Coefficienten

$$\begin{array}{ll} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{array}$$

sind. Wenn Winkel von gleichen Zeichen durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben werden, mithin $xy + yx = 0$ ist, so hat man

$$xy' = xx' + x'y', \quad yx' = yx + xx', \quad yy' = yx + xx' + x'y'$$

Sind nun die Winkel xy und $x'y'$ beide $= 90^0$, so ist

$$\cos xy' = -\sin xx', \quad \cos yx' = \sin xx', \quad \cos yy' = \cos xx'$$

Wenn dagegen $xy = 90^0$ und $x'y' = -90^0$ ist, so ist

$$\cos xy' = \sin xx', \quad \cos yx' = \sin xx', \quad \cos yy' = -\cos xx'$$

Daher hat man, wie bekannt, beim Uebergange zu einem System desselben Sinnes die lineare Substitution

$$\begin{array}{ll} \cos xx' & -\sin xx' \\ \sin xx' & \cos xx' \end{array}$$

mit der Determinante 1 zu machen; beim Uebergange zu einem System entgegengesetzten Sinnes ist die erforderliche Substitution

$$\begin{array}{ll} \cos xx' & \sin xx' \\ \sin xx' & -\cos xx' \end{array}$$

mit der Determinante -1.

Diese Bemerkungen werden durch ein bekanntes goniometrisches Theorem (s. unten §. 16, 3) bestätigt, nach welchem für beliebige Richtungen einer Ebene x, y, x', y'

$$\begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{vmatrix} = \sin xy \sin x'y'$$

Diese Determinante ist positiv oder negativ, je nachdem $\sin xy$ und $\sin x'y'$ einerlei Zeichen haben oder nicht.

Umgekehrt schliesst man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\cos^2 xx' + \cos^2 xy' &= 1\\ \cos^2 yx' + \cos^2 yy' &= 1\\ \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' &= 0\end{aligned}$$

dass $\sin^2 xy$ und $\sin^2 x'y'$ den Werth 1 haben. Denn nach der Multiplicationsregel (§. 6, 4) ist

$$\sin^2 xy \sin^2 x'y' = \begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Um die angegebene Substitution zu rationalisiren, braucht man nur $\cos xx'$ u. s. w. durch $\operatorname{tang} \frac{1}{2} xx'$ auszudrücken. Vergl. (6) Beispiel 1.

8. Um von dem orthogonalen Coordinatensystem x, y, z zu dem orthogonalen System x', y', z' überzugehen, hat man bekanntlich die lineare Substitution

$$\begin{matrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{matrix}$$

zu machen, deren Coefficienten den Gleichungen (5, I) genügen müssen, mithin Functionen von 3 unbestimmten Grössen sind. Bezeichnet O den gemeinschaftlichen Anfang der Coordinaten und wird die Kugel, deren Centrum O und deren Radius die Längeneinheit ist, von den Richtungen der positiven Coordinaten in X, Y, Z, X', Y', Z' geschnitten, so sind die Coordinatensysteme desselben oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem die sphärischen Dreiecke XYZ und $X'Y'Z'$, oder die Tetraeder $OXYZ$ und $OX'Y'Z'$ desselben oder entgegengesetzten Sinnes sind.

I. Bei zwei sphärischen Figuren, wenn sie gleich und ähnlich und desselben Sinnes sind, giebt es einen sich selbst entsprechenden Punct S von solcher Lage, dass

$$SX = SX', \qquad SY = SY', \qquad SZ = SZ'$$
$$\text{Winkel } XSY = X'SY', \qquad YSZ = Y'SZ', \qquad XSZ = X'SZ'$$
$$XSX' = YSY' = ZSZ'\text{*)}$$

Nach einem elementaren Satze der sphärischen Trigonometrie hat man daher, wenn OS durch s und der Winkel XSX' durch φ bezeichnet wird,

$$\begin{aligned}
\cos xx' &= \cos^2 sx + \sin^2 sx \cos\varphi = \cos^2 sx(1-\cos\varphi) + \cos\varphi \\
\cos yy' &= \cos^2 sy + \sin^2 sy \cos\varphi = \cos^2 sy(1-\cos\varphi) + \cos\varphi \\
\cos zz' &= \cos^2 sz + \sin^2 sz \cos\varphi = \cos^2 sz(1-\cos\varphi) + \cos\varphi
\end{aligned}$$

Wenn man ferner die gleichen Winkel XSY und $X'SY'$ durch ϑ bezeichnet, so hat man nach demselben Satze der Trigonometrie

$$\begin{aligned}
\cos xy' &= \cos sx \cos sy' + \sin sx \sin sy' \cos(\varphi+\vartheta) \\
&= \cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos\varphi\cos\vartheta - \sin sx \sin sy \sin\varphi \sin\vartheta
\end{aligned}$$

Da aber

$$\cos xy = \cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos\vartheta = 0$$
$$\sin sx \sin sy \sin\vartheta = 6OXYS = \sin xy \cos sz = \cos sz$$

so erhält man

$$\cos xy' = \cos sx \cos sy(1-\cos\varphi) - \cos sz \sin\varphi$$

Aus dem Werthe von $\cos xy'$ findet man $\cos yx'$, weil der Winkel $YSX' = YSX + XSX' = -\varphi + \vartheta$ ist, durch Vertauschung von φ mit $-\varphi$

$$\cos yx' = \cos sx \cos sy(1-\cos\varphi) + \cos sz \sin\varphi$$

Ebenso ist**)

$$\begin{aligned}
\cos yz' &= \cos sy \cos sz(1-\cos\varphi) - \cos sx \sin\varphi \\
\cos zy' &= \cos sy \cos sz(1-\cos\varphi) + \cos sx \sin\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos zx' &= \cos sz \cos sx(1-\cos\varphi) - \cos sy \sin\varphi \\
\cos xz' &= \cos sz \cos sx(1-\cos\varphi) + \cos sy \sin\varphi
\end{aligned}$$

---

*) Vergl. des Verf. Abhandlung über die Gleichheit und Aehnlichkeit u. s. w. Dresden 1852, §. 31 und 52, oder Elem. d. Math. 5tes Buch §. 4, 18.

**) Diess sind die von Euler 1776 Nov. Comm. Petrop. 20 p. 217 gefundenen Formeln, welche Jacobi Crelle J. 2 p. 188 in Erinnerung gebracht hat mit der Aufforderung, dieselben einfacher abzuleiten. Vergl. Jacobi Crelle J. 15 p. 309.

wo von den verfügbaren Grössen sx, sy, sz, φ die ersteren durch die Gleichung

$$\cos^2 sx + \cos^2 sy + \cos^2 sz = 1$$

unter einander verbunden sind.

Um diese Substitutionscoefficienten zu rationalisiren, führt man $\frac{1}{2}\varphi$ ein und erhält

$$\cos xx' = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi + 2\cos^2 sx \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi - \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$\cos xy' = 2\cos sx \cos sy \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi - 2\cos sz \sin\tfrac{1}{2}\varphi \cos\tfrac{1}{2}\varphi$$

u. s. w. Setzt man

$$\cos sx \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \lambda, \quad \cos sy \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \mu, \quad \cos sz \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \nu$$

mithin

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2, \quad \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

so erhält man das obige System rationaler Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution (6).

II. Bei zwei sphärischen Figuren, wenn sie gleich und ähnlich und entgegengesetzten Sinnes sind, giebt es einen sich selbst entsprechenden Hauptkreis, dessen Pol S seinem Gegenpunct entspricht, so dass

$$SX + SX' = 180^0, \quad SY + SY' = 180^0, \quad SZ + SZ' = 180^0$$
$$\text{Winkel } XSY = X'SY', \quad YSZ = Y'SZ', \quad XSZ = X'SZ'$$
$$XSX' = YSY' = ZSZ'$$

Unter Annahme der vorigen Bezeichnungen hat man

$$\cos xx' = -\cos^2 sx + \sin^2 sx \cos\varphi = -\cos^2 sx(1 + \cos\varphi) + \cos\varphi$$
$$\cos xy' = -\cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos(\varphi + \vartheta)$$
$$= -\cos sx \cos sy(1 + \cos\varphi) - \cos sz \sin\varphi$$

u. s. w. Diese Formeln unterscheiden sich von den im vorigen Falle gefundenen nur durch die Zeichen, nachdem φ mit $180^0 - \varphi$ vertauscht worden ist. Der Winkel $180^0 - \varphi$ ist aber derjenige, welchen das System x', y', z' um die Axe s beschreiben muss, damit $X'Y'Z'$ mit der Gegenfigur von XYZ zusammenfällt.

III. Nach Staudt's Theorem (s. unten §. 16, 3) ist für beliebige Winkel und Lagen der coordinirten Axen

$$\begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{vmatrix} = 36\, OXYZ\,.\,OX'Y'Z'$$

Folglich ist die Determinante positiv oder negativ, je nachdem diese Tetraeder oder die von den Axen gebildeten Ecken desselben oder entgegengesetzten Sinnes sind. Bei einem orthogonalen System beträgt aber das zugehörige Tetraeder $\frac{1}{6}$ Cubikeinheit, daher ist die Determinante der orthogonalen Substitution 1 oder -1, je nachdem das neue System mit dem alten desselben oder entgegengesetzten Sinnes ist*).

IV. Umgekehrt schliesst man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos^2 xx' + \cos^2 xy' + \cos^2 xz' &= 1 \\ \cos^2 yx' + \cos^2 yy' + \cos^2 yz' &= 1 \\ \cos^2 zx' + \cos^2 zy' + \cos^2 zz' &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' + \cos xz' \cos yz' &= 0 \\ \cos xx' \cos zx' + \cos xy' \cos zy' + \cos xz' \cos zz' &= 0 \\ \cos yx' \cos zx' + \cos yy' \cos zy' + \cos yz' \cos zz' &= 0 \end{aligned}$$

dass die Systeme x, y, z und x', y', z' orthogonal sind**). Denn

$$(36\, OXYZ\,.\,OX'Y'Z')^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

worin nach der Regel für die Multiplication der Determinanten

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos xx' \cos xx' + \cos xy' \cos xy' + \cos xz' \cos xz' = 1 \\ a_{12} &= \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' + \cos xz' \cos yz' = 0 \end{aligned}$$

u. s. w., so dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Nun ist $6\, OXYZ = \sin xy \sin xz \sin(xy\hat{\ }xz)$ u. s. w. Das Product der Sinus wird aber nur dann 1, wenn die Winkel recht sind.

---

*) Auf diesen Unterschied der Substitutionsdeterminanten hat Jacobi Crelle J. 15 p. 309 aufmerksam gemacht. Vergl. Möbius Statik §. 127, Magnus anal. Geom. des Raumes §. 13.

**) Dedekind Crelle J. 50 p. 272.

9. Wenn $c_{11}, .., c_{nn}$ die Coefficienten einer orthogonalen Substitution bedeuten, deren Determinante ε d. i. entweder 1 oder -1 ist, wenn

$$f(z) = \begin{vmatrix} c_{11}+z & c_{12} & . . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}+z & . . & c_{2n} \\ . & . & . . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & . . & c_{nn}+z \end{vmatrix}$$

so ist die Gleichung $f(z) = 0$ reciprok und hat mit Ausnahme der Wurzel $-\varepsilon$, welche bei ungeradem n vorhanden ist, und der Wurzeln 1 und -1, welche bei $\varepsilon = -1$ und geradem n vorhanden sind, keine realen Wurzeln*).

Beweis. Die Entwickelung der Determinante $f(z)$ nach steigenden Potenzen von z (§. 5, 1) giebt vermöge der in (5, VI) bewiesenen Eigenschaft der zu $f(0)$ gehörigen Subdeterminanten ohne Weiteres zu erkennen, dass die Coefficienten von $z^0, z^1, z^2, ..$ von den Coefficienten von $z^n, z^{n-1}, z^{n-2}, ..$ sich nur durch den Factor ε unterscheiden, dass also

$$\frac{\varepsilon f(z)}{z^n} = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

was sich durch Multiplication der Determinanten ε und $f(z)$ bestätigen lässt. Demnach ist $f(-\varepsilon) = (-1)^n \varepsilon^{n-1} f(-\varepsilon)$, also $f(-\varepsilon) = 0$, wenn entweder n ungerade, oder n gerade und $\varepsilon = -1$. Ferner ist $f(\varepsilon) = \varepsilon^{n-1} f(\varepsilon)$, also $f(\varepsilon) = 0$, wenn n gerade und $\varepsilon = -1$. Ueber die Realität der übrigen Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ erhält man Aufschluss durch das Product der Determinanten

$$f(z)f(-z) = \begin{vmatrix} d_{11}-z^2 & zd_{12} & zd_{13} & . \\ zd_{21} & d_{22}-z^2 & zd_{23} & . \\ zd_{31} & zd_{32} & d_{33}-z^2 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

worin nach der Multiplicationsregel

$$d_{ii} - z^2 = c_{i1}c_{i1} + .. + (c_{ii}+z)(c_{ii}-z) + .. + c_{in}c_{in}$$
$$zd_{ik} = c_{i1}c_{k1} + .. + (c_{ii}+z)c_{ki} + .. + c_{ik}(c_{kk}-z) + .. + c_{in}c_{kn}$$

---

*) Brioschi Liouv. 19 p. 253. Vergl. Schläfli Crelle J. 65 p. 186.

folglich (5, I)

$$d_{ii} = 1, \qquad d_{ik} = c_{ki} - c_{ik}$$

ist. Daher hat man $d_{ik} + d_{ki} = 0$, und nach §. 5, 9

$$\frac{f(z)f(-z)}{z^n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z} - z & d_{12} & . \\ d_{21} & \frac{1}{z} - z & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{z} - z\right)^n + \left(\frac{1}{z} - z\right)^{n-2} \Sigma D_2 + \ldots$$

wobei die a. a. O. näher beschriebenen Coefficienten der Potenzen von $\frac{1}{z} - z$ positiv sind. Wenn nun z real ist, so ist bei geraden oder ungeraden n

$$\frac{f(z)f(-z)}{z^n} \quad \text{oder} \quad \frac{f(z)f(-z)}{z^n\left(\frac{1}{z} - z\right)}$$

positiv, folglich $f(z)$ von Null verschieden.

10. Wenn durch die lineare Substitution

$$x_1 = c_{11}y_1 + \ldots + c_{1n}y_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = c_{n1}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n$$

die quadratische Form $\Sigma a_{ik}x_ix_k$ in die Summe von n Quadraten $p_1y_1{}^2 + p_2y_2{}^2 + \ldots + p_ny_n{}^2$ übergeht, so erfolgt die Identität

$$\Sigma_{ik} a_{ik}(c_{i1}y_1 + \ldots)(c_{k1}y_1 + \ldots) = p_1y_1{}^2 + \ldots + p_ny_n{}^2$$

unter den Bedingungen

$$\Sigma_{ik} a_{ik}(c_{ir}c_{ks} + c_{is}c_{kr}) = 0, \qquad \Sigma_{ik} a_{ik}c_{ir}c_{kr} = p_r$$

Setzt man zur Abkürzung

$$g_{is} = a_{i1}c_{1s} + \ldots + a_{in}c_{ns}$$

so erhält man bei der Voraussetzung $a_{ki} = a_{ik}$ zur Bestimmung der Substitution das unzureichende System von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen

$$c_{1r}g_{1s} + \ldots + c_{nr}g_{ns} = 0$$

Aus solchen Grössen c, welche diesem System genügen, bildet man dann

$$c_{1r}g_{1r} + \ldots + c_{nr}g_{nr} = p_r$$

und findet

$$g_{1r}x_1 + \ldots + g_{nr}x_n = p_r y_r$$

$$p_r y_r^2 = \frac{(g_{1r}x_1 + \ldots + g_{nr}x_n)^2}{g_{1r}c_{1r} + \ldots + g_{nr}c_{nr}}$$

so dass nur die Verhältnisse der Substitutionscoefficienten zu einander in Betracht kommen.

Die Determinanten der gegebenen und der transformirten Form sind $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ und $p_1 p_2 \ldots p_n$. Wenn nun die Determinante der Substitution den Werth ε hat, so ist (3)

$$p_1 \ldots p_n = \varepsilon^2 \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$$

Wenn man ferner die Adjuncte des Elements c_{ik} in der Determinante ε durch γ_{ik} bezeichnet, und die Gleichungen

$$\begin{array}{rl} 0 = & c_{11}g_{1r} + \ldots + c_{n1}g_{nr} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_r = & c_{1r}g_{1r} + \ldots + c_{nr}g_{nr} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 = & c_{1n}g_{1r} + \ldots + c_{nn}g_{nr} \end{array}$$

der Reihe nach mit $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots$ multiplicirt, so findet man durch Addition

$$p_r \gamma_{ir} = \varepsilon g_{ir}$$

und hiernach wie oben (5)

$$p_1 \ldots p_m \Sigma \pm c_{m+1,m+1} \ldots c_{nn} = \varepsilon \Sigma \pm g_{11} \ldots g_{mm}$$

11. Die Summe $f = \Sigma a_{ik} x_i y_k$ von n^2 Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für i und k alle Nummern von 1 bis n setzt, und deren Coefficienten a_{ik} einer Beschränkung nicht unterliegen, ist eine lineare Form sowohl der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, als auch der Variablen $y_1, \ldots, y_n$, und heisst deshalb eine bilineare Form derselben*).

---

*) Jacobi Crelle J. 53 p. 265. Vergl. Christoffel Crelle J. 63 p. 255.

Aus den Differentialquotienten

$$u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n$$

$$v_k = \frac{\partial f}{\partial y_k} = a_{1k} x_1 + \ldots + a_{nk} x_n$$

bildet man die characteristische Gleichung

$$f = u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n = v_1 y_1 + \ldots + v_n y_n$$

Von der bilinearen Form kann man ein Product einer linearen Function der x mit einer linearen Function der y so ablösen, dass eine bilineare Form von zweimal $n-1$ Variablen übrig bleibt. Unter der Voraussetzung, dass der Coefficient a_{11} nicht null ist, dass also in u_1 die Variable y_1, in v_1 die Variable x_1 nicht fehlt, bilde man die bilineare Form

$$f_1 = f - \frac{u_1 v_1}{a_{11}} = \Sigma a'_{ik} x_i y_k$$

welche die Variablen x_1, y_1 nicht mehr enthält, weil

$$a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i1} a_{1k}}{a_{11}}$$

verschwindet, wenn für i oder k die Nummer 1 gesetzt wird. Mittelst der Differentialquotienten

$$u'_i = \frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \qquad v'_k = \frac{\partial f_1}{\partial y_k}$$

kann ferner unter der Voraussetzung, dass a'_{22} nicht null ist, dass also weder y_2 in u'_2 noch x_2 in v'_2 fehlt, die bilineare Form

$$f_2 = f_1 - \frac{u'_2 v'_2}{a'_{22}} = \Sigma a''_{ik} x_i y_k$$

gebildet werden, welche auch die Variablen x_2, y_2 nicht mehr enthält, weil der Coefficient

$$a''_{ik} = a'_{ik} - \frac{a'_{i2} a'_{2k}}{a'_{22}}$$

verschwindet, wenn für i oder k die Nummer 2 gesetzt wird. Durch fortgesetzte Ausscheidungen der angegebenen Art erhält man die besondere Darstellung

$$f = \frac{u_1 v_1}{a_{11}} + \frac{u'_2 v'_2}{a'_{22}} + \frac{u''_3 v''_3}{a''_{33}} + \ldots$$

Die Differentiation ergiebt aber

$$u'_i = u_i - \frac{u_1 a_{i1}}{a_{11}}, \qquad v'_k = v_k - \frac{v_1 a_{1k}}{a_{11}}$$

$$u''_i = u'_i - \frac{u'_2 a'_{i2}}{a'_{22}}, \qquad v''_k = v'_k - \frac{v'_2 a'_{2k}}{a'_{22}}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

mithin ist u'_i eine von y_1 unabhängige homogene lineare Verbindung von u_1 und u_i; u''_i eine von y_1 und y_2 unabhängige homogene lineare Verbindung von u'_2 und u'_i, also auch von u_1, u_2, u_i; u. s. w. In allen diesen Verbindungen hat u_i den Coefficienten 1. Daher kann

$$u^{(m)}_i = C_1 u_1 + \ldots + C_m u_m + u_i$$

gesetzt werden. Weil diese Formel von $y_1, \ldots, y_m$ unabhängig sein soll, so verschwinden die Coefficienten dieser Grössen, und man hat

$$0 = C_1 a_{11} + \ldots + C_m a_{m1} + a_{i1}$$
$$\cdots$$
$$0 = C_1 a_{1m} + \ldots + C_m a_{mm} + a_{im}$$

folglich (§. 8)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} & a_{i1} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & \ldots & a_{mm} & a_{im} \\ u_1 & \ldots & u_m & u_i - u^{(m)}_i \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$u^{(m)}_i \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} & a_{i1} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & \ldots & a_{mm} & a_{im} \\ u_1 & \ldots & u_m & u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & u_1 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & u_m \\ a_{i1} & \ldots & a_{im} & u_i \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & a_{1,m+1} y_{m+1} + \ldots + a_{1n} y_n \\ \cdot & \ldots & \cdot & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & a_{m,m+1} y_{m+1} + \ldots + a_{mn} y_n \\ a_{i1} & \ldots & a_{im} & a_{i,m+1} y_{m+1} + \ldots + a_{in} y_n \end{vmatrix}$$

Aus $u^{(m)}_i$ wird $v^{(m)}_k$ abgeleitet, indem man u_r durch v_r, und a_{rs} durch a_{sr} ersetzt.

Die Variable y_k hat in $u^{(m)}_i$ den Coefficienten $a^{(m)}_{ik}$, also ist

$$a^{(m)}_{ik}\Sigma \pm a_{11} \,.\,.\, a_{mm} = \Sigma \pm a_{11} \,.\,.\, a_{mm} a_{ik}$$

$$a^{(m)}_{m+1,m+1} = \frac{\Sigma \pm a_{11} \,.\,.\, a_{m+1,m+1}}{\Sigma \pm a_{11} \,.\,.\, a_{mm}}$$

Unter Annahme der Bezeichnungen

$$A_m = \Sigma \pm a_{11} \,.\,.\, a_{mm}$$

$$U_m = \begin{vmatrix} a_{11} & .\,. & a_{1,m-1} & u_1 \\ . & .\,. & . & . \\ a_{m1} & .\,. & a_{m,m-1} & u_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & .\,. & a_{1,m-1} & a_{1m} y_m + \,.\,. \\ . & .\,. & . & .\,. \\ a_{m1} & .\,. & a_{m,m-1} & a_{mm} y_m + \,.\,. \end{vmatrix}$$

$$= A_m y_m + \,.\,.$$

$$V_m = \begin{vmatrix} a_{11} & .\,. & a_{m-1,1} & v_1 \\ . & .\,. & . & . \\ a_{1m} & .\,. & a_{m-1,m} & v_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & .\,. & a_{m-1,1} & a_{m1} x_m + \,.\,. \\ . & .\,. & . & .\,. \\ a_{1m} & .\,. & a_{m-1,m} & a_{mm} x_m + \,.\,. \end{vmatrix}$$

$$= A_m x_m + \,.\,.$$

ergiebt sich endlich

$$\frac{u^{(m)}_{m+1} v^{(m)}_{m+1}}{a^{(m)}_{m+1,m+1}} = \frac{U_{m+1} V_{m+1}}{A_m A_{m+1}} = \frac{A_{m+1}}{A_m} x_{m+1} y_{m+1} + \,.\,.$$

$$f = \frac{U_1 V_1}{A_1} + \frac{U_2 V_2}{A_1 A_2} + \frac{U_3 V_3}{A_2 A_3} + \,.\,.$$

Wenn es demnach eine Anordnung der Variablen einer bilinearen Form giebt, bei der die partialen Determinanten A_1, A_2, A_3, .. nicht verschwinden, so kann die bilineare Form auf eine bestimmte Weise als Summe von Producten homogener linearer Functionen $U_1 V_1$, $U_2 V_2$, .. so dargestellt werden, dass U_m und V_m von der $m$ten (und den folgenden) Variablen je einer Schaar abhängen und die vorangehenden Variablen nicht enthalten.

Diese »Jacobi'sche Transformation« der bilinearen Form wird auch dadurch erhalten, dass man die Kronecker'sche Subdeterminantenformel (§. 7, 4) auf das Quadrat der Elemente

$$\begin{matrix} 0 & v_1 & \cdot\cdot & v_n \\ u_1 & a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ u_n & a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{matrix}$$

anwendet $(a_{00} = 0,\ a_{i0} = u_i,\ a_{0k} = v_k)$. Dann ist

$$\Sigma \frac{\begin{vmatrix} 0 & m+1 & . \\ m & m+1 & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m & m+1 & . \\ 0 & m+1 & . \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & . \\ m & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m+1 & . \\ m+1 & . \end{vmatrix}} = 0$$

und zwar

$$\begin{vmatrix} m & . \\ m & . \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{mm} \cdot\cdot a_{nn} = B_m, \quad B_{n+1} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & m+1 & . \\ m & m+1 & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_m & a_{m,m+1} & . \\ u_{m+1} & a_{m+1,m+1} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = Y_m$$

eine lineare Form der $y_1, \cdot\cdot, y_m$, frei von $y_{m+1}, \cdot\cdot, y_n$,

$$\begin{vmatrix} m & m+1 & . \\ 0 & m+1 & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_m & v_{m+1} & . \\ a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = X_m$$

eine lineare Form der $x_1, \cdot\cdot, x_m$, frei von $x_{m+1}, \cdot\cdot, x_n$.

Das Anfangsglied $(m = 0)$ der Summe hat den Werth

$$\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & . \\ 0 & 1 & . \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & . \\ 1 & . \end{vmatrix}} = -f$$

weil

$$\begin{aligned} f &= v_1 y_1 + \cdot\cdot + v_n y_n \\ u_1 &= a_{11} y_1 + \cdot\cdot + a_{1n} y_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n &= a_{n1} y_1 + \cdot\cdot + a_{nn} y_n \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} f & v_1 & \cdot\cdot & v_n \\ u_1 & a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ u_n & a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Daher ist

$$\frac{Y_1 X_1}{B_1 B_2} + \frac{Y_2 X_2}{B_2 B_3} + \cdot\cdot + \frac{Y_n X_n}{B_n} = f$$

KRONECKER Berl. Monatsbericht 1874 März. Weiteres über diese Transformation findet man bei KRONECKER a. a. O. und in dem Monatsbericht 1874 April. Daselbst wird gezeigt, dass die Transformation auf jede bilineare Form bei geeigneter Anordnung der Variablen anwendbar ist, auch dann, wenn die Determinante der Form null ist.

12. Ebenso kann unter den analogen Voraussetzungen die quadratische Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$, deren Coefficienten a_{ik} und a_{ki} gleich sind, auf eine bestimmte Weise als Aggregat von Quadraten linearer Formen der Variablen so dargestellt werden, dass die *m*te Form von der *m*ten und den folgenden Variablen, aber nicht von den vorangehenden abhängt*). Denn die bilineare Form $f = \Sigma a_{ik} x_i y_k$ geht in die gegebene quadratische Form über, wenn y_k mit x_k, a_{ki} mit a_{ik} zusammenfällt. Versteht man nun unter u_i, u'_i, .. die halben Differentialquotienten (§. 13, 1), so hat man (11)

$$f = \frac{U_1^2}{A_1} + \frac{U_2^2}{A_1 A_2} + \cdots + \frac{U_n^2}{A_{n-1} A_n}$$

worin $A_m = \Sigma \pm a_{11} \cdots a_{mm}$ eine nicht verschwindende Subdeterminante des Systems der Coefficienten bedeutet, und

$$U_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1,m-1} & u_1 \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot\cdot & a_{m,m-1} & u_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1,m-1} & a_{1m} x_m + \cdots \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot\cdot & a_{m,m-1} & a_{mm} x_m + \cdots \end{vmatrix}$$

Die Anzahl der Quadrate, welche negative Coefficienten haben, ist der Anzahl der Zeichenwechsel gleich, welche die Reihe

$$1, \quad A_1, \quad A_2, \ldots, A_n$$

darbietet.

13. Zwei gegebene quadratische Formen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$

$$\varphi = \Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad \psi = \Sigma b_{ik} x_i x_k$$

---

*) JACOBI Crelle J. 53 p. 270 und 282. Diese Transformation der quadratischen Formen war von GAUSS theor. combin. observ. 31 (Comm. Gött. V. 1823, W. 4 p. 37) angezeigt worden. Einen Beweis derselben findet man bei BRIOSCHI Nouv. Ann. 1856 Juli.

deren Determinanten nicht verschwinden, können im Allgemeinen durch eine bestimmte lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}y_1 + \ldots + c_{1n}y_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n &= c_{n1}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n \end{aligned}$$

deren Determinante den Werth ε hat, in die Formen

$$\begin{aligned} \varphi &= p_1y_1^2 + p_2y_2^2 + \ldots + p_ny_n^2 \\ \psi &= s_1p_1y_1^2 + s_2p_2y_2^2 + \ldots + s_np_ny_n^2 \end{aligned}$$

gebracht werden*). Denn man hat zur Bestimmung der n^2 Substitutionscoefficienten $\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)+n$ Gleichungen (10).

I. Durch diese Transformation geht die quadratische Form

$$s\varphi - \psi$$

mit der Determinante

$$f = \begin{vmatrix} sa_{11}-b_{11} & \ldots & sa_{1n}-b_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ sa_{n1}-b_{n1} & \ldots & sa_{nn}-b_{nn} \end{vmatrix}$$

über in die Form $(s-s_1)p_1y_1^2 + \ldots + (s-s_n)p_ny_n^2$, deren Determinante

$$(s-s_1)\ldots(s-s_n)p_1\ldots p_n = \varepsilon^2 f$$

ist (3). Zugleich hat die Determinante $p_1 \ldots p_n$ der transformirten Form φ den Werth $\varepsilon^2\Sigma \pm a_{11}\ldots a_{nn}$, also ist

$$f = (s-s_1)\ldots(s-s_n)\Sigma \pm a_{11}\ldots a_{nn}$$

d. h. $s_1, \ldots, s_n$ sind die Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades $f=0$. In der That sind $s_1\varphi-\psi$, $s_2\varphi-\psi$, .. singuläre quadratische Formen mit verschwindenden Determinanten und von weniger als n Unbestimmten (§. 13, 10).

II. Setzt man wie oben (10)

$$g_{ik} = a_{i1}c_{1k} + \ldots + a_{in}c_{nk}, \qquad h_{ik} = b_{i1}c_{1k} + \ldots + b_{in}c_{nk}$$

---

*) Cauchy 1829 Exerc. de Math. 4 p. 140. Jacobi Crelle J. 12 p. 1. Weierstrass Berl. Monatsbericht 1858 p. 207 (vergl. Brioschi Ann. di Matem. 1858 Juli und Christoffel Crelle J. 63 p. 255).

und bezeichnet man die Adjuncte des Elements c_{ik} in ε durch γ_{ik}, so hat man

$$p_k \gamma_{ik} = \varepsilon g_{ik} \qquad s_k p_k \gamma_{ik} = \varepsilon h_{ik}$$

folglich $s_k g_{ik} - h_{ik} = 0$ d. h.

$$(s_k a_{i1} - b_{i1}) c_{1k} + \ldots + (s_k a_{in} - b_{in}) c_{nk} = 0$$

Indem man hierin für i die Nummern 1, 2, .., n setzt, erhält man für die gesuchten Coefficienten c_{1k}, c_{2k}, .. ebensoviel homogene lineare Gleichungen (§. 8, 2). Wenn nun von dem System

$$\begin{matrix} s_k a_{11} - b_{11} & \ldots & s_k a_{1n} - b_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ s_k a_{n1} - b_{n1} & \ldots & s_k a_{nn} - b_{nn} \end{matrix}$$

die Determinante $n$ten Grades null, mithin s_k eine Wurzel der Gleichung $f = 0$ ist, und wenn nicht alle Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades null sind, so genügen $n-1$ Gleichungen, welche die Proportion $c_{1k} : c_{2k} : \ldots$ und das entsprechende Glied $p_k y_k^2$ (10) bestimmen. Wenn aber alle Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades null und nicht alle Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades null sind, so genügen $n-2$ Gleichungen, welche von 2 Coefficienten c_{1k}, c_{2k}, .. die übrigen abhängig machen.

III. Unter der Voraussetzung, dass alle Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades null sind, ist df null (§. 3, 15) d. h. s_k eine mehr als 1fache Wurzel von $f = 0$; unter der Voraussetzung, dass alle Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades null sind, ist $d^2 f$ null d. h. s_k eine mehr als 2fache Wurzel von $f = 0$; u. s. w. Wenn demnach s_k eine einfache Wurzel von $f = 0$ ist, so sind nicht alle Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades null; wenn s_k eine zweifache Wurzel von $f = 0$ ist, so sind nicht alle Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades null; u. s. w.

IV. Wenn s_1 und s_2 conjugirt complex sind, so sind auch $p_1 y_1{}^2$ und $p_2 y_2{}^2$ conjugirt complex, mithin φ und ψ durch je n Quadrate darstellbar, welche nicht alle dasselbe Zeichen haben (§. 13, 14). Umgekehrt schliesst man: Wenn eine der Formen $s\varphi - \psi$ definit ist (z. B. φ entsprechend $s = \infty$), so ist die

Determinante f der Form $s\varphi - \psi$ bei nicht realem s nicht null, alle Wurzeln der Gleichung $f = 0$ sind real.

V. Wenn das Element $sa_{qr} - b_{qr}$ des obigen Systems die Adjuncte f_{qr} hat, so ist $f_{rq} = f_{qr}$ (§. 3, 5), $f_{qr}{}^2 - f_{qq} f_{rr}$ durch f theilbar, null bei $f = 0$ (§. 7, 2), und nach §. 7, 3

$$f df_{qr} - f_{qr} df = -ds \Sigma a_{\alpha\beta} f_{q\alpha} f_{r\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, .., n)$$

so dass, wenn f und df bei demselben s null werden, auch $\Sigma a_{\alpha\beta} f_{q\alpha} f_{r\beta}$ verschwindet. Unter der Voraussetzung, dass eine der Formen $s\varphi - \psi$ definit ist, ist eine λfache Wurzel der Gleichung $f = 0$ zugleich eine $(\lambda - 1)$fache Wurzel der Gleichungen $f_{qr} = 0$, wie Weierstrass a. a. O. bewiesen hat.

Dieser Satz folgt, wie Kronecker in demselben Monatsbericht bemerkt hat, aus der oben §. 13, 15 gezeigten Transformation von $s\varphi - \psi$ in die Summe von n Quadraten

$$\Sigma (s - s_h) z_h{}^2 \qquad h = 1, 2, .., n$$

wo $z_h = c_{h1} x_1 + .. + c_{hn} x_n$ eine bestimmte lineare Form der x ist. Durch diese Transformation wird

$$\Sigma (s a_{ik} - b_{ik}) x_i x_k = \Sigma (s - s_h) c_{hi} c_{hk} x_i x_k$$
$$s a_{ik} - b_{ik} = \Sigma (s - s_h) c_{hi} c_{hk}$$

Das Element $s a_{ik} - b_{ik}$ entsteht aus den beiden Systemen

$$\begin{matrix} (s-s_1) c_{11} & .. & (s-s_n) c_{n1} \\ . & .. & . \\ (s-s_1) c_{1n} & .. & (s-s_n) c_{nn} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & .. & c_{n1} \\ . & .. & . \\ c_{1n} & .. & c_{nn} \end{matrix}$$

durch Composition der Zeile i des ersten Systems mit der Zeile k des andern Systems. Daher ist nach §. 6, 1 z. B. die Subdeterminante $m$ten Grades

$$\begin{vmatrix} s a_{11} - b_{11} & .. & s a_{1m} - b_{1m} \\ . & .. & . \\ s a_{m1} - b_{m1} & .. & s a_{mm} - b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (s-s_1) c_{11} & .. & (s-s_n) c_{n1} \\ . & .. & . \\ (s-s_1) c_{1m} & .. & (s-s_n) c_{nm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & .. & c_{n1} \\ . & .. & . \\ c_{1m} & .. & c_{nm} \end{vmatrix}$$

eine Summe von $\binom{n}{m}$ Gliedern, deren jedes durch m Grössen der Reihe $s-s_1, \ldots, s-s_n$ theilbar ist. Wenn nun s_1 eine λfache Wurzel der Gleichung $f=0$, also die Determinante $n$ten Grades f durch $(s-s_1)^\lambda$ theilbar ist, so ist eine Subdeterminante $(n-1)$ten Grades die Summe von Gliedern, deren jedes durch $n-1$ Grössen der Reihe $s-s_1, \ldots, s-s_n$ theilbar ist. Unter diesen $n-1$ Grössen befinden sich höchstens $n-\lambda$, die nicht $s-s_1$ sind, also mindestens $\lambda-1$ Grössen $s-s_1$, d. h. jede Subdeterminante $(n-1)$ten Grades ist theilbar durch $(s-s_1)^{\lambda-1}$, jede Subdeterminante $(n-2)$ten Grades ist theilbar durch $(s-s_1)^{\lambda-2}$, u. s. w.

Anmerkung. Wenn die beliebige quadratische Form ψ durch n Quadrate insbesondere mittelst einer orthogonalen Substitution dargestellt werden soll, welche die Form

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \quad \text{in} \quad y_1^2 + \ldots + y_n^2$$

verwandelt, so hat die zu diesem Zwecke aufzulösende Gleichung $f=0$ nur reale Wurzeln, welche aber nicht nothwendig alle von einander verschieden sind. Auf einer solchen Transformation beruht die Bestimmung der mechanischen Hauptaxen eines gegebenen Körpers*), der säcularen Störungen der Planeten (Laplace Mém. de Paris 1772, II p. 293 und 362), der Hauptaxen der Linien und der Flächen 2ter Ordnung (Euler 1748 Introd. II App., Poisson und Hachette 1802 J. de l'éc. polyt. Cah. 11 p. 170, Binet 1811 Corresp. sur l'éc. polyt. t. 2 p. 323 u. A.). Die dabei eintretende Realität der Wurzeln der Gleichung $f=0$ wurde für den dritten Grad von Lagrange (Mém. de Berlin 1773 p. 108) bewiesen, für höhere Grade von Cauchy a. a. O.; auf einem neuen und directen Wege für den dritten Grad von Kummer (Crelle J. 26 p. 268. Vergl. Jacobi Crelle J. 30 p. 46. Bauer 1868 Crelle J. 71 p. 40), für höhere Grade von Borchardt Liouv.

*) Ausgehend von D'Alembert's und Euler's Untersuchungen (Mém. de Berlin 1749—50) hatte Segner (Specimen theoriae turbinum, Halle 1755) die freien Rotationsaxen eines Körpers durch eine cubische Gleichung bestimmt, und den Weg eröffnet, auf welchem Euler weitergegangen ist (Theoria motus corp. sol. 1765 cap. V).

J. 12 p. 50 — und zwar unter der Voraussetzung, dass alle Wurzeln der Gleichung $f = 0$ von einander verschieden sind. Die angezeigte Eigenschaft der Gleichung $f = 0$ erkennt man nach SYLVESTER (Philos. Mag. 1852, II p. 138) durch Entwickelung des Products $f(s)f(-s)$, welches bei imaginären Werthen von s durchaus positiv ist (vergl. 9). Die Auflösung des allgemeinen Problems ist tiefer ergründet worden von WEIERSTRASS (Berl. Monatsbericht 1868 Mai 18) und KRONECKER (ebendas. und 1874 p. 1).

14*). Eine orthogonale Substitution, welche $x_1{}^2 + x_2{}^2 + ..$ in $y_1{}^2 + y_2{}^2 + ..$ transformirt, ist ein besonderer Fall einer linearen Substitution, durch welche überhaupt eine quadratische Form der x in sich selbst d. h. in dieselbe Form der y transformirt wird**).

I. Aus dem System

$$\begin{array}{c}
\varepsilon(a_{11}x_1 + .. + a_{1n}x_n) = a_{11}y_1 + .. + a_{n1}y_n \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\varepsilon(a_{n1}x_1 + .. + a_{nn}x_n) = a_{1n}y_1 + .. + a_{nn}y_n
\end{array}$$

folgt durch Multiplication mit $x_1, x_2, ..$ und Addition

$$\varepsilon \Sigma a_{k\lambda} x_k x_\lambda = \Sigma a_{\lambda k} x_k y_\lambda$$

und durch Multiplication mit $y_1, y_2, ..$ und Addition

$$\varepsilon \Sigma a_{\lambda k} x_k y_\lambda = \Sigma a_{k\lambda} y_k y_\lambda$$

also unter der Bedingung $\varepsilon^2 = 1$

$$\Sigma a_{k\lambda} x_k x_\lambda = \Sigma a_{k\lambda} y_k y_\lambda$$

Wenn nun

$$p_{k\lambda} = \tfrac{1}{2}(a_{k\lambda} + a_{\lambda k}) = p_{\lambda k}$$

$$q_{k\lambda} = \tfrac{1}{2}(a_{k\lambda} - a_{\lambda k}) = -q_{\lambda k} \quad \text{und} \quad q_{kk} = 0$$

$$f(x) = \Sigma p_{k\lambda} x_k x_\lambda \qquad (k, \lambda = 1, 2, .., n)$$

$$f_k(x) = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = \sum_\lambda p_{k\lambda} x_\lambda$$

---

*) ROSANES briefliche Mittheilung 1874 Dec. Vergl. Crelle J. 80 p. 53.

**) Vergl. EISENSTEIN, HERMITE, CAYLEY Crelle J. 41 p. 151, 47 p. 308, 50 p. 288.

gesetzt wird, so können die Grössen a durch die Grössen p und q ausgedrückt werden, dergestalt dass die gegebene quadratische Form $f(x)$ durch die lineare Substitution

$$\varepsilon f_1(x) + \varepsilon \sum_i q_{1i} x_i = f_1(y) + \sum_i q_{i1} y_i$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\varepsilon f_n(x) + \varepsilon \sum_i q_{ni} x_i = f_n(y) + \sum_i q_{in} y_i$$

in $f(y)$ übergeht. Die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Coefficienten q bleiben unbestimmt, ε ist entweder 1 oder -1.

II. Eine lineare Substitution $x_k = \sum_\lambda c_{k\lambda} y_\lambda$, welche die quadratische Form $f(x) = \sum p_{k\lambda} x_k x_\lambda$ in sich selbst d. h. in $f(y)$ transformirt, lässt sich (abgesehn von besondern Fällen) auf folgendem Wege in das System (I)

$$\varepsilon \sum_\lambda a_{k\lambda} x_\lambda = \sum_\lambda a_{\lambda k} y_\lambda \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

überführen. Man setzt

$$\xi_k = x_k + \varepsilon y_k = \sum_\lambda b_{\lambda k} y_\lambda$$

so dass $b_{k\lambda} = c_{k\lambda} + \varepsilon \delta_{k\lambda}$ und $\delta_{k\lambda}$ entweder 1 oder 0 ist, je nachdem k und λ gleich oder ungleich sind. Wenn $\sum \pm b_{11} b_{22} \ldots$ nicht null ist, so findet man (§. 8, 1) die Umkehrung

$$y_k = \sum_i \beta_{ik} \xi_i$$

Demnach ist

$$f(x) = \sum p_{k\lambda} (\xi_k - \varepsilon y_k)(\xi_\lambda - \varepsilon y_\lambda) = f(\xi) - 2\varepsilon \sum p_{k\lambda} y_k \xi_\lambda + f(y)$$

und wegen der Voraussetzung $f(x) = f(y)$

$$f(\xi) = 2\varepsilon \sum p_{k\lambda} y_k \xi_\lambda = 2\varepsilon \sum p_{k\lambda} \beta_{ik} \xi_i \xi_\lambda$$

Setzt man endlich

$$2\varepsilon (p_{1\lambda} \beta_{i1} + \ldots + p_{n\lambda} \beta_{in}) = a_{\lambda i}$$

so erhält man

$$f(\xi) = \sum a_{\lambda i} \xi_i \xi_\lambda$$

bei allen ξ, folglich $a_{i\lambda} + a_{\lambda i} = 2 p_{i\lambda}$. Nun ist

$$\sum_k (a_{k\lambda} + a_{\lambda k}) y_k = \sum_{ik} 2 p_{k\lambda} \beta_{ik} \xi_i = \sum_i \varepsilon a_{\lambda i} \xi_i = \sum_i \varepsilon a_{\lambda i} (x_i + \varepsilon y_i)$$

folglich

$$\sum_k a_{k\lambda} y_k = \sum_k \varepsilon a_{\lambda k} x_k$$

III. Diese Ueberführung der Substitution (II) in das System (I) ist nicht thunlich, wenn die Determinante $\Sigma \pm b_{11} b_{22} \ldots$ null ist, d. h. wenn die Gleichung $n$ten Grades für ϱ

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \varrho & c_{12} & . \\ c_{21} & c_{22} - \varrho & . \\ . & . & \end{vmatrix} = 0$$

die Wurzeln 1 und -1 zugleich hat.

Diese Gleichung (vergl. oben 9) ist reciprok*). Denn sie drückt die Bedingung aus, unter der in dem System (II) x durch ϱy ersetzt werden kann. Aus der Identität $f(x) = f(y)$ folgt aber durch Differentiation das congruente System

$$f_k(y) = c_{1k} f_1(x) + \ldots + c_{nk} f_n(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Und die Bedingung, unter der in diesem System ϱx durch y, mithin $f_k(y)$ durch $\varrho f_k(x)$ ersetzt werden kann, fällt mit der aufgestellten Gleichung zusammen. Das Product der Wurzeln $\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots$ ist 1 oder -1.

Für das System (I) lautet die entsprechende Gleichung

$$\begin{vmatrix} \varepsilon a_{11} - \varrho a_{11} & \varepsilon a_{12} - \varrho a_{21} & . \\ \varepsilon a_{21} - \varrho a_{12} & \varepsilon a_{22} - \varrho a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = 0$$

welche man sofort als reciproke Gleichung erkennt. Das Product ihrer Wurzeln ist ε^n.

Wenn überhaupt aus den linearen Formen

$$x_i = c_{1i} y_1 + \ldots + c_{ni} y_n$$

das System

$$\begin{array}{ccc} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n & = & d_{11} y_1 + \ldots + d_{n1} y_n \\ . \quad . \quad . & & . \quad . \quad . \\ a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n & = & d_{1n} y_1 + \ldots + d_{nn} y_n \end{array}$$

gebildet wird, wobei

$$d_{k\lambda} = a_{k1} c_{\lambda 1} + \ldots + a_{kn} c_{\lambda n}$$

---

*) Hermite und Cayley a. a. O.

so ist die entsprechende Gleichung

$$\begin{vmatrix} d_{11}-\varrho a_{11} & d_{21}-\varrho a_{12} & . \\ d_{12}-\varrho a_{21} & d_{22}-\varrho a_{22} & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}-\varrho & c_{12} & . \\ c_{21} & c_{22}-\varrho & . \\ . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . \\ a_{21} & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = 0$$

Bei $d_{k\lambda} = \varepsilon a_{k\lambda}$ findet man $\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots = \varepsilon^n$. Also ist bei geradem n eine Substitution, deren Determinante den Werth -1 hat, in dem System (I) nicht enthalten. In andern Fällen*) kann die Gleichung für ϱ die beiden Wurzeln 1 und -1 nur dann haben, wenn ihre Wurzeln nicht alle von einander verschieden sind.

IV. Die angegebene Substitution ist eine orthogonale, wenn

$$p_{k\lambda} = \delta_{k\lambda} \qquad f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

Alsdann wird $\frac{1}{2}(a_{k\lambda} + a_{\lambda k}) = \delta_{k\lambda}$ und

$$\varepsilon \sum_i a_{\lambda i} x_i = \sum_i a_{i\lambda} y_i \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

so dass $\frac{1}{2} n(n-1)$ Grössen a unbestimmt bleiben. Diese Darstellung steht mit der von Cayley gegebenen in ersichtlichem Zusammenhang. Vergl. Veltmann Schlömilch Zeitschrift t. 16 p. 523.

§. 15. Die Dreiecksfläche und das Tetraedervolum.

1. Wenn O den Anfang beliebiger coordinirter Axen bedeutet, wenn x, y und x_1, y_1 die mit den Axen parallelen Coordinaten der Puncte A und B sind und die Geraden, auf denen OA und OB liegen, durch r, r_1 bezeichnet werden, wenn ferner die Dreiecksfläche OAB positiv oder negativ genommen wird, je nachdem der Sinn der Drehung, welcher durch die Ordnung der Puncte O, A, B bestimmt ist, mit dem positiven Sinn der Ebene, in welchem positive Winkel derselben be-

*) Vergl. Bachmann Crelle J. 76 p. 331 und Hermite Crelle J. 78 p. 325 für $n = 3$.

schrieben werden, übereinstimmt oder nicht übereinstimmt, so ist*)

$$2OAB = OA.OB\sin rr_1 = BO.OA\sin r_1 r = \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix} \sin xy$$

Beweis. Es ergiebt sich unmittelbar aus der über das Zeichen der Dreiecksfläche gemachten Voraussetzung, dass $OA.OB\ \sin rr_1$ und $BO.OA\ \sin r_1 r$ auch dem Zeichen nach mit $2OAB$ übereinstimmen.

Wenn durch OA', OB' die Abscissen von A, B, durch r', x', y' die Normalen der Geraden r, x, y bezeichnet werden, so haben OA und OA' auf y', OA und $A'A$ auf x' gleiche orthogonale Projectionen d. h.

$$OA\cos y'r = OA'\cos xy' \qquad OA\cos yr' = OA'\sin xy$$
$$OA\cos x'r = A'A\cos yx' \qquad -OA\cos xr' = A'A\sin xy$$

Die Distanz B von OA wird durch orthogonale Projection der gebrochnen Linie $OB'B$ auf r' gefunden

$$x_1\cos xr' + y_1\cos yr'$$

Also ist

$$2OAB = x_1.OA\cos xr' + y_1.OA\cos yr' = (-x_1 y + xy_1)\sin xy$$

Anmerkung. Wenn der Punct B von dem Punct A verschwindende Distanz hat, so ist

$$r_1 = r + dr \qquad x_1 = x + dx \qquad y_1 = y + dy$$

Indem man den Winkel xr durch ϑ bezeichnet, erhält man

$$2OAB = r^2 d\vartheta = \begin{vmatrix} x & x+dx \\ y & y+dy \end{vmatrix} \sin xy = \begin{vmatrix} x & dx \\ y & dy \end{vmatrix} \sin xy$$

durch Anwendung von §. 3, 7.

---

*) Diese Formel ist in einem Theorem Varignon's (Mém. de Paris 1719 p. 66) enthalten, dessen genaue geometrische Darstellung nebst der Bestimmung der Zeichen man in Möbius Statik §. 35 und in des Verf. Elementen der Math. Planimetrie §. 9, 8 findet. In der gegenwärtigen Gestalt kommt die Formel bei Monge 1809 vor (J. de l'école polyt. Cah. 15 p. 68), und liegt der Formel für die Fläche eines Polygons zu Grunde, welche Gauss (Werke 4 p. 393) in den Zusätzen zu Schumacher's Uebersetzung von Carnot géom. de position gegeben hat.

2. Wenn das Volum des Tetraeders $OABC$ durch die Kanten OA, OB, OC und deren Winkel unzweideutig ausgedrückt werden soll, so bestimme man willkürlich die positiven Richtungen der Geraden x, y, z, auf denen die Kanten OA, OB, OC liegen, und demgemäss die Zeichen dieser Kanten; ferner bestimme man willkürlich die positive Richtung der Normale z' der Ebene xy, und demgemäss den positiven Sinn dieser Ebene. Dann ist (1) auch dem Zeichen nach

$$2\,OAB = OA\,.\,OB \sin xy$$

und die Distanz der Spitze C von der Ebene OAB

$$OC \cos zz'$$

folglich*)

$$6\,OABC = OA\,.\,OB\,.\,OC \sin xy \cos zz'$$

Wenn zur positiven Richtung von x oder y die entgegengesetzte gewählt wird, so wechseln OA oder OB und $\sin xy$ das Zeichen. Wenn zur positiven Richtung von z die entgegengesetzte gewählt wird, so wechseln OC und $\cos zz'$ das Zeichen. Wenn zur positiven Richtung von z' die entgegengesetzte gewählt wird, so wechseln $\sin xy$ und $\cos zz'$ das Zeichen. Bei jeder Wahl erhält also $OA\,.\,OB\,.\,OC \sin xy \cos zz'$ dasselbe Zeichen.

In gleicher Weise findet man

$$6\,OBAC = OA\,.\,OB\,.\,OC \sin yx \cos zz'$$

Nun ist $\sin yx = -\sin xy$, folglich $OBAC = -OABC$, u. s. w.

3. Der goniometrische Factor, mit welchem das Product der an einer Ecke des Tetraeders liegenden Kanten multiplicirt werden muss, damit man das 6fache Volum des Tetraeders erhält, wird nach Staudt (Crelle J. 24 p. 252) der Sinus der Ecke genannt und durch $\sin xyz$ bezeichnet, wenn die Kanten auf den Geraden x, y, z liegen. Nach (2) ist

$$\sin xyz = \sin yzx = \ldots = -\sin yxz = -\sin xzy = \ldots$$

Das Parallelepiped, dessen Kanten auf x, y, z positive Einheiten sind, hat das Volum (2)

*) Vergl. Möbius Statik §. 63 und des Verf. Elem. d. Math. Trigonometrie §. 6, 14.

$$\sin yz \cos xx' = \sin zx \cos yy' = \sin xy \cos zz' = \sin xyz$$

wenn die positiven Normalen der coordinirten Ebenen yz, zx, xy durch x', y', z' bezeichnet werden.

Aus sphärisch-trigonometrischen Gründen hat man noch

$$\sin xyz = \sin xy \sin xy^{\wedge}z = \sin xy \sin yz \sin xy^{\wedge}yz$$

wenn $xy^{\wedge}z$ und $xy^{\wedge}yz$ die mit der Ebene xy von der Geraden z und von der Ebene yz gebildeten Winkel bedeuten, und

$$\cos zx - \cos xy \cos yz = \sin zx \sin yz \cos xy^{\wedge}yz$$

Aus den beiden Gleichungen findet man*)

$$\sin^2 xyz = \sin^2 xy \sin^2 yz - (\cos zx - \cos xy \cos yz)^2$$

$$= 1 - \cos^2 xy - \cos^2 yz - \cos^2 zx + 2 \cos xy \cos yz \cos zx$$

$$= 4 \sin \frac{xy + xz + yz}{2} \sin \frac{-xy + xz + yz}{2} \sin \frac{xy - xz + yz}{2} \sin \frac{xy + xz - yz}{2}$$

Die Grösse $\sin^2 xyz$ liegt zwischen 0 und 1, und erreicht die untere Grenze nur dann, wenn die Geraden x, y, z mit einer Ebene parallel sind, die obere Grenze nur dann, wenn die Geraden normal zu einander sind. Zugleich ist (§. 5, 6)

$$\sin^2 xyz = \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix}$$

analog der Gleichung

$$\sin^2 xy = \begin{vmatrix} 1 & \cos xy \\ \cos xy & 1 \end{vmatrix}$$

4. I. Coordinaten einer Strecke heissen die Projectionen derselben auf je eine von 3 coordinirten Axen durch Ebenen, die mit den beiden andern Axen parallel sind. Coordinaten einer Planfigur heissen die Projectionen derselben auf je eine von 3 coordinirten Ebenen durch Gerade, die mit den beiden andern Ebenen parallel sind. Wenn insbesondere die Strecke eine Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, oder die Planfigur ein Kräftepaar bedeutet, so sind ihre Coordi-

---

*) Euler Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158. Vergl. des Verf. Elem. der Math. Trigonometrie §. 5, 11.

naten Componenten (composantes) des resultirenden mechanischen Elements.

II. Das Prisma, dessen Basis und Kante in Bezug auf die Axen x, y, z durch ihre Coordinaten $L \sin yz$, $M \sin zx$, $N \sin xy$ und A, B, C gegeben sind, hat das Volum

$$(AL + BM + CN) \sin xyz \text{*)}$$

Beweis. Das die Basis p auf yz parallel mit x projicirende Prisma hat den Normalschnitt

$$p \cos xn = L \sin yz \cos xx' = L \sin xyz \quad (3)$$

u. s. w., wenn durch x', y', z', n die positiven Normalen der coordinirten Ebenen und der Basis-Ebene bezeichnet werden. Die Höhe des gegebenen Prisma wird durch orthogonale Projection der aus A, B, C bestehenden gebrochnen Linie auf n gefunden

$$A \cos xn + B \cos yn + C \cos zn$$

Also hat das Prisma das Volum

$$Ap \cos xn + Bp \cos yn + Cp \cos zn = (AL + BM + CN) \sin xyz$$

III. Wenn in Bezug auf die coordinirten Axen x, y, z mit dem gemeinschaftlichen Nullpunct O die Puncte A, B, C die Coordinaten x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 haben, so ist auch dem Zeichen nach**)

$$6\,OABC = \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \sin xyz$$

Beweis. Die Coordinaten der Fläche $2\,OBC$ sind (1)

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \sin yz, \qquad \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \sin zx, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \sin xy$$

Die Coordinaten der Strecke OA sind x, y, z. Durch Compo-

---

*) S. den Aufsatz des Verf. Leipz. Berichte 1873 p. 525, welcher die Anwendung dieses Lemma bei der Reduction der einen starren Körper angreifenden Kräfte zeigt.

**) Lagrange sur les pyr. 14. Monge und Möbius a. a. O. Gauss Disq. generales circa superficies curvas 2, VII. Gauss und Möbius haben das Zeichen bestimmt. Vergl. den Aufsatz des Verf. Crelle J. 73 p. 94.

sition dieser Coordinaten mit den Coefficienten von $\sin yz$, $\sin zx$, $\sin xy$ erhält man (II) die angegebene Determinante.

Anmerkung. Vermöge der Sätze (1) und (4) können die einfachsten der in §. 3, 9 aufgestellten Identitäten geometrisch gedeutet werden.

5. Wenn die Puncte A, B, C in Bezug auf zwei Axen der Ebene ABC durch die Coordinaten $x, y;\ x_1, y_1;\ x_2, y_2$ gegeben sind, so ist*)

$$2ABC = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} \sin xy$$

Beweis. Da die Strecken AB, AC die Coordinaten $x_1 - x$, $y_1 - y$; $x_2 - x$, $y_2 - y$ haben, so ist (1)

$$2ABC = \begin{vmatrix} x_1 - x & x_2 - x \\ y_1 - y & y_2 - y \end{vmatrix} \sin xy$$

Wie in §. 3, 3 erhält man statt dieser Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ x & x_1 - x & x_2 - x \\ y & y_1 - y & y_2 - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Anmerkung. So oft man in der Formel ABC zwei Buchstaben permutirt, so vielmal wechselt die Dreiecksfläche das Zeichen. In der That erleidet die Determinante der Coordinaten durch Permutation von zwei Colonnen einen Zeichenwechsel (§. 2, 3). Durch Entwickelung der Determinante erhält man die bekannte Identität $ABC = OBC + OCA + OAB$.

Als Bedingung, unter welcher A auf der Geraden BC liegt, d. h. als Gleichung der Geraden durch B und C ergiebt sich, weil $ABC = 0$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

---

*) Diese bekannte Formel und die entsprechende des folg. Art. kommt in dieser Gestalt bei Cayley Cambr. math. J. 2 p. 268, Joachimsthal Crelle J. 40 p. 23 u. A. vor.

6. Wenn die Puncte A, B, C, D in Bezug auf drei Axen durch die Coordinaten x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 gegeben sind, so ist

$$6\,ABCD = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \sin xyz$$

Beweis. Die Coordinaten der Strecken AB, AC, AD sind $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$; $x_2 - x$, $y_2 - y$, $z_2 - z$; u. s. w. Daher ist (4)

$$6\,ABCD = \begin{vmatrix} x_1 - x & x_2 - x & x_3 - x \\ y_1 - y & y_2 - y & y_3 - y \\ z_1 - z & z_2 - z & z_3 - z \end{vmatrix} \sin xyz$$

Durch Transformation der Determinante erhält man

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 & 1-1 \\ x & x_1 - x & x_2 - x & x_3 - x \\ y & y_1 - y & y_2 - y & y_3 - y \\ z & z_1 - z & z_2 - z & z_3 - z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Anmerkung. So oft man in der Formel $ABCD$ zwei Buchstaben permutirt, so vielmal wechselt das Tetraedervolum zugleich mit der dafür gefundenen Determinante das Zeichen.

Unter der Bedingung $ABCD = 0$ liegt A auf der Ebene BCD, mithin ist die Gleichung der Ebene BCD

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

wovon die geometrische Bedeutung unmittelbar wahrzunehmen ist.

7. Die Lage des Punctes P in Bezug auf das Tetraeder $ABCD$ ist durch die Tetraederverhältnisse

$$BCDP : CADP : ABDP : PABC$$

bestimmt*). Die Puncte P, A, B, C, D haben in Bezug auf drei beliebige Axen die Coordinaten x, y, z; x_1, y_1, z_1; u. s. w. Da die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & .. & 1 \\ x & x_1 & .. & x_4 \\ y & y_1 & .. & y_4 \\ z & z_1 & .. & z_4 \\ u & u_1 & .. & u_4 \end{vmatrix} = \mu u + \mu_1 u_1 + .. + \mu_4 u_4$$

verschwindet, wenn die letzte Zeile mit einer andern übereinstimmt, so hat man

$$\begin{array}{llll} \mu & + \mu_1 & + .. + \mu_4 & = 0 \\ \mu x & + \mu_1 x_1 & + .. + \mu_4 x_4 & = 0 \\ \mu y & + \mu_1 y_1 & + .. + \mu_4 y_4 & = 0 \\ \mu z & + \mu_1 z_1 & + .. + \mu_4 z_4 & = 0 \end{array}$$

Der Punct P erscheint demnach als Schwerpunct der Puncte

$$\mu_1 . A, \qquad \mu_2 . B, \qquad \mu_3 . C, \qquad \mu_4 . D$$

d. h. der in A, B, C, D befindlichen Massen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, und wird dadurch construirt, dass man je nach gegebenen Verhältnissen die Strecke AB in N, die Strecke NC in O, die Strecke OD in P theilt. Vergl. des Verf. Elem. d. Math., Stereometrie §. 11, 5. Die Adjuncten $\mu, \mu_1, ..$ verhalten sich zu einander wie die Tetraeder $ABCD$, $BCDP$, .. (6), während $ABCD : BCDP = AA_1 : A_1P$, wenn die Gerade AP mit der Ebene BCD den Punct A_1 gemein hat, u. s. w.

Aus den obigen Gleichungen folgt

$$\mu(a + bx + cy + dz) + .. + \mu_4(a + bx_4 + cy_4 + dz_4) = 0$$

eine Gleichung, deren geometrische Bedeutung gefunden wird, indem man die Ebene $a + bx' + cy' + dz' = 0$ vorstellt, welche

*) Lagrange sur les pyr. 28. Grössen, welche wie diese Tetraeder sich verhalten, werden bei Möbius (baryc. Calcul) als barycentrische Coordinaten des Punctes P in Bezug auf Fundamentalpyramide $ABCD$ angewendet, bei Feuerbach (Untersuchung der dreieckigen Pyramide p. 5) als coordinirte Coefficienten, bei Plücker (Crelle J. 5 p. 1) als Tetraeder-Coordinaten (in der Ebene Dreieck-Coordinaten).

von den durch P, A, .. parallel mit z gezogenen Geraden in P', A', .. geschnitten wird. Dann ist

$$\begin{aligned} a + bx + cy + dz' &= 0 \\ a + bx + cy + dz &= d(z-z') = d\,.\,P'P \end{aligned}$$

u. s. w., folglich

$$\mu\,.\,P'P + \mu_1\,.\,A'A + \mu_2\,.\,B'B + \mu_3\,.\,C'C + \mu_4\,.\,D'D = 0$$

wobei unter P', A', .. die Durchschnitte irgend einer Schaar von Parallelen, die man durch P, A, .. gezogen hat, mit einer beliebigen Ebene verstanden werden können.

8. Sind A_1, B_1, C_1 die Mitten von AD, BD, CD, so wird das Tetraeder $ABCD$ von den Ebenen A_1BC, AB_1C, ABC_1 halbirt, und der Schwerpunct P des Tetraeders $ABCD$ liegt auf den genannten Halbirungsebenen, so dass

$$A_1BCP = 0, \qquad AB_1CP = 0, \qquad ABC_1P = 0$$

Nun hat A_1 die Coordinaten $\frac{1}{2}(x_1+x_4)$, $\frac{1}{2}(y_1+y_4)$, $\frac{1}{2}(z_1+z_4)$, folglich ist (6)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(x_1+x_4) & x_2 & x_3 & x \\ \frac{1}{2}(y_1+y_4) & y_2 & y_3 & y \\ \frac{1}{2}(z_1+z_4) & z_2 & z_3 & z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}x_1 & x_2 & x_3 & x \\ \frac{1}{2}y_1 & y_2 & y_3 & y \\ \frac{1}{2}z_1 & z_2 & z_3 & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}x_4 & x_2 & x_3 & x \\ \frac{1}{2}y_4 & y_2 & y_3 & y \\ \frac{1}{2}z_4 & z_2 & z_3 & z \end{vmatrix} = 0$$

oder $-\mu_4+\mu_1 = 0$. Ebenso ist $-\mu_4+\mu_2 = 0$, $-\mu_4+\mu_3 = 0$, daher $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = -\frac{1}{4}\mu$ und

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \quad y = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \quad z = \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}$$

d. h. der Schwerpunct des Tetraeders ist die Spitze von 4 gleichen Tetraedern, deren Basen die Flächen des Tetraeders sind, und der Schwerpunct von 4 gleichen Massen, welche in den Ecken des Tetraeders ihre Schwerpuncte haben*).

---

*) Roberval. S. Lagrange Mécanique I sect. V, 3 und sur les pyr. 31—35.

9. Wenn die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks in Bezug auf ein System von zwei Axen gegeben sind, so findet man die Fläche des Dreiecks auf folgende Weise*). Die Coefficienten der Gleichungen seien $a : b : c$, $a_1 : b_1 : c_1$, $a_2 : b_2 : c_2$, d. h. für jeden Punct der ersten Seite, dessen Coordinaten x', y' sind, hat man $a + bx' + cy' = 0$ u. s. w. Die Coordinaten der Eckpuncte x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 nebst 3 Hülfsgrössen p, p_1, p_2 sind durch die linearen Systeme

$$\begin{array}{lll} a + b\,x + c\,y = p & a + b\,x_1 + c\,y_1 = 0 & a + b\,x_2 + c\,y_2 = 0 \\ a_1 + b_1 x + c_1 y = 0 & a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 = p_1 & a_1 + b_1 x_2 + c_1 y_2 = 0 \\ a_2 + b_2 x + c_2 y = 0 & a_2 + b_2 x_1 + c_2 y_1 = 0 & a_2 + b_2 x_2 + c_2 y_2 = p_2 \end{array}$$

bestimmt, welche ausdrücken, dass der Punct (x, y) auf der zweiten und dritten, aber nicht auf der ersten Geraden liegt, u. s. w. Nach §. 6, 4 ist

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix}$$

Nach §. 3, 7 ist

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & b & c \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

u. s. w. Wenn man nun die Determinante der Coefficienten durch R und die Adjuncten der ersten Colonne durch $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ bezeichnet, so ist

$$R = p\alpha = p_1\alpha_1 = p_2\alpha_2$$

daher

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix} = pp_1p_2 = \frac{R^3}{\alpha\alpha_1\alpha_2}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{R^2}{\alpha\alpha_1\alpha_2}$$

mithin (5) die gesuchte doppelte Dreiecksfläche $= \dfrac{R^2 \sin xy}{\alpha\alpha_1\alpha_2}$

---

*) JOACHIMSTHAL Crelle J. 40 p. 23. Zu demselben Resultat und dem entsprechenden des folg. Art. war auf einem andern Wege MINDING Crelle J. 5 p. 397 gelangt.

Nachdem man auf bekannte Weise die Höhen des Dreiecks, d. h. die Abstände der Puncte (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) von der ersten, zweiten, dritten Geraden berechnet hat, findet man die Seiten des Dreiecks, wenn man die gefundene doppelte Dreiecksfläche durch die Höhen dividirt.

Wenn die Determinante der Coefficienten verschwindet, ohne dass die Elemente einer Zeile zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die Elemente einer andern Zeile, so gehen die 3 Geraden durch einen endlich fernen Punct.

10. Wenn die Gleichungen der Flächen eines Tetraeders in Bezug auf ein System von 3 Axen gegeben sind, so wird das Volum des Tetraeders auf dieselbe Weise gefunden, wie die Dreiecksfläche aus den Seiten. Die Coefficienten der Gleichungen seien $a:b:c:d$, $a_1:b_1:c_1:d_1$, $a_2:b_2:c_2:d_2$, $a_3:b_3:c_3:d_3$, d. h. für jeden Punct (x', y', z') der ersten Fläche hat man $a+bx'+cy'+dz'=0$ u. s. w. Die Coordinaten der Eckpuncte x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 nebst den Hülfsgrössen p, p_1, p_2, p_3 sind durch 4 Systeme von je 4 Gleichungen

$$\begin{aligned} a + b\,x + c\,y + d\,z &= p \\ a_1 + b_1x + c_1y + d_1z &= 0 \\ a_2 + b_2x + c_2y + d_2z &= 0 \\ a_3 + b_3x + c_3y + d_3z &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. bestimmt, welche ausdrücken, dass der Punct (x, y, z) auf der zweiten, dritten, vierten, aber nicht auf der ersten Ebene liegt, u. s. w. Dann ist

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & b & c & d \\ 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$R = p\alpha = p_1\alpha_1 = p_2\alpha_2 = p_3\alpha_3,$$

folglich

$$pp_1p_2p_3 = \frac{R^4}{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{R^3}{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$$

und das gesuchte 6fache Tetraedervolum $(6) = \frac{R^3 \sin xyz}{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$. Hieraus lassen sich mit Hülfe der Höhen des Tetraeders seine Flächen berechnen.

Wenn die Determinante der Coefficienten verschwindet, ohne dass zwei Zeilen proportionale Elemente enthalten, so gehen die 4 Ebenen durch einen endlich fernen Punct.

§. 16. Producte von Strecken, Dreiecken, Tetraedern.

1. Durch A, A_1, A_2, .. und B, B_1, B_2, .. werden 2 Systeme von Puncten, und durch c_{ik} das Product von 2 Strecken AA_i, BB_k der Geraden r, ϱ mit dem Cosinus des Winkels dieser Geraden bezeichnet. Um das Product c_{ik} zu berechnen, bestimme man willkürlich die positiven Richtungen der Geraden r, ϱ und demgemäss die Werthe und Zeichen der Strecken und des Cosinus. Wenn als positive Richtung einer Geraden die entgegengesetzte angenommen wird, so wechseln eine Strecke und der Cosinus das Zeichen. Also erhält bei jeder Wahl das Product c_{ik} dasselbe Zeichen.

Sind die Puncte A, A_i, B, B_k durch ihre orthogonalen Coordinaten

$$\begin{matrix} a & b & c & \qquad & \alpha & \beta & \gamma \\ x_i & y_i & z_i & \qquad & \xi_k & \eta_k & \zeta_k \end{matrix}$$

in Bezug auf die Axen x, y, z gegeben, bei denen $\sin xyz = 1$, so findet man durch orthogonale Projection der Strecke AA_i und ihrer Coordinaten $x_i - a$, .. auf die Gerade ϱ

$$AA_i \cos r\varrho = (x_i - a)\cos x\varrho + (y_i - b)\cos y\varrho + (z_i - c)\cos z\varrho$$

folglich

$$(1) \quad AA_i . BB_k \cos r\varrho = (x_i - a)(\xi_k - \alpha) + (y_i - b)(\eta_k - \beta) + (z_i - c)(\zeta_k - \gamma)$$

$$\text{(II)} \quad \cos r\varrho = \cos xr \cos x\varrho + \cos yr \cos y\varrho + \cos zr \cos z\varrho$$

Nun ist identisch

$$2(x_i - a)(\xi_k - \alpha) = (\xi_k - a)^2 + (x_i - \alpha)^2 - (\alpha - a)^2 - (\xi_k - x_i)^2$$

u. s. w., folglich*)

$$\text{(III)} \quad 2AA_i . BB_k \cos r\varrho = AB_k^2 + A_iB^2 - AB^2 - A_iB_k^2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & AB^2 & AB_k^2 \\ 1 & A_iB^2 & A_iB_k^2 \end{vmatrix}$$

2. Nach §. 6, 1 hat man nun

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots = \begin{vmatrix} x_1 - a & y_1 - b & z_1 - c \\ x_2 - a & y_2 - b & z_2 - c \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 - \alpha & \eta_1 - \beta & \zeta_1 - \gamma \\ \xi_2 - \alpha & \eta_2 - \beta & \zeta_2 - \gamma \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Daher ist die Determinante $\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots$ null, wenn sie 4ten oder höhern Grades ist. Indem man c_{ik} durch $\cos_{ik}$ ersetzt, wenn die Strecken Einheiten sind, erhält man die trigonometrischen Gleichungen

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33} c_{44} = 0 \qquad \Sigma \pm \cos_{11} \cos_{22} \cos_{33} \cos_{44} = 0$$

für beliebige 2mal 5 Puncte und 2mal 4 Gerade.

Nach dem Zusammenfallen des zweiten Systems mit dem ersten ist $c_{ik} = c_{ki}$, und man findet aus der ersten Gleichung den Zusammenhang unter den Strecken, welche 5 Puncte verbinden (vergl. unten 12), während die andre Gleichung der analytischen Geometrie folgende Ausdrücke liefert:

$$\text{(I)} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos xr & \cos yr & \cos zr \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{(II)} \quad \begin{vmatrix} \cos r\varrho & \cos x\varrho & \cos y\varrho & \cos z\varrho \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0$$

---

*) Vergl. Carnot Géom. de pos. 354. Mém. sur la relation etc. 27.

Die Gleichung (I) enthält den Zusammenhang unter den von 4 Geraden (Ebenen) gebildeten Winkeln, unter den Seiten und Diagonalen eines sphärischen Vierecks, unter den Flächenwinkeln eines Tetraeders (CARNOT Géom. de pos. 350). Wenn insbesondere x, y, z, r die Richtungen der Kanten OA, OB, OC und des Diameter OD der dem Tetraeder $OABC$ umgeschriebenen Kugel bedeuten, wenn $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$, so hat man

$$\frac{\cos xr}{a} = \frac{\cos yr}{b} = \frac{\cos zr}{c} = \frac{1}{d}$$

$$\begin{vmatrix} d^2 & a & b & c \\ a & 1 & \cos xy & \cos xz \\ b & \cos xy & 1 & \cos yz \\ c & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0$$

zur Berechnung des Diameter der einem Tetraeder umgeschriebenen Kugel aus den Elementen einer Ecke (LAGRANGE sur les pyr. 21. LEGENDRE élém. de géom. Note V).

Die Gleichung (II) dient zur Bestimmung des Winkels von zwei Geraden durch die Winkel, welche dieselben mit den coordinirten Axen bilden. MAGNUS anal. Geom. des Raumes §. 9 (7). Vergl. den Aufsatz des Verf. in Crelle J. 46 p. 145.

Wenn alle Puncte auf der Ebene xy liegen, und alle Geraden mit dieser Ebene parallel sind, so hat man

$$\Sigma \pm c_{11}\, c_{22}\, c_{33} = 0 \qquad \Sigma \pm \cos_{11} \cos_{22} \cos_{33} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos xr & \cos yr \\ \cos xr & 1 & \cos xy \\ \cos yr & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \cos r\varrho & \cos x\varrho & \cos y\varrho \\ \cos xr & 1 & \cos xy \\ \cos yr & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3. Ferner hat man mit Rücksicht auf §. 15, 4 und 6

$$\Sigma \pm c_{11}\, c_{22}\, c_{33} = 36\, AA_1 A_2 A_3 \,.\, BB_1 B_2 B_3$$

$$\Sigma \pm \cos_{11} \cos_{22} \cos_{33} = \sin r_1 r_2 r_3 \sin \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$$

für beliebige 2mal 4 Puncte und 2mal 3 Grade*).

---

*) Diese beiden Sätze hat STAUDT 1842 gegeben Crelle J. 24 p. 252. Der zweite Satz, der in dem besondern Fall $\sin r_1 r_2 r_3 = 1$ früher bei GAUSS vorkommt (Disq. gener. circa superficies 2, VI), ist von CAUCHY reproducirt worden Exerc. d'Anal. 4 p. 41.

Nach dem Zusammenfallen der beiden Tetraeder ist $c_{ik}=c_{ki}$ und man erhält für $36\,AA_1\,A_2A_3{}^2$ die von Lagrange sur les pyr. 15 gegebene und von Legendre élém. de géom. Note V reproducirte Formel.

Es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} \cos ff' & \cos fg' & \cos fh' \\ \cos gf' & \cos gg' & \cos gh' \\ \cos hf' & \cos hg' & \cos hh' \end{vmatrix} = \sin fgh \sin f'g'h'$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos fg & \cos fh \\ \cos fg & 1 & \cos gh \\ \cos fh & \cos gh & 1 \end{vmatrix} = \sin^2 fgh \text{ (§. 15, 3)}$$

und bei $\sin xyz = 1$

$$\begin{vmatrix} \cos xf & \cos xg & \cos xh \\ \cos yf & \cos yg & \cos yh \\ \cos zf & \cos zg & \cos zh \end{vmatrix} = \sin fgh \text{ (§. 15, 4)}$$

Wenn alle Puncte auf der Ebene xy liegen und alle Geraden mit dieser Ebene parallel sind, so bleibt

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 4\,AA_1A_2\,.\,BB_1B_2$$

für 2 Dreiecke einer Ebene und

$$\begin{vmatrix} \cos_{11} & \cos_{12} \\ \cos_{21} & \cos_{22} \end{vmatrix} = \sin r_1 r_2 \sin \varrho_1 \varrho_2$$

für 2 Paare von Geraden, die mit einer Ebene parallel sind. Zufolge dieser Gleichung ist bei 3 beliebigen Winkeln λ, μ, ν einer Ebene

$$\cos(\lambda-\mu)\cos\nu - \cos(\lambda-\nu)\cos\mu = \sin\lambda\sin(\mu-\nu)$$

insbesondere

$$\begin{vmatrix} \cos xf & \cos xg \\ \cos yf & \cos yg \end{vmatrix} = \sin fg$$

unter der Voraussetzung $\sin xy = 1$.

4. Bei der Entwickelung der Determinante 2ten Grades $\Sigma \pm c_{11}c_{22}$ ist (§. 15, 1 und 4)

$$\begin{vmatrix} x_1-a & y_1-b \\ x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = 2\,AA_1A_2\cos zn \qquad \begin{vmatrix} \xi_1-\alpha & \eta_1-\beta \\ \xi_2-\alpha & \eta_2-\beta \end{vmatrix} = 2\,BB_1B_2\cos z\nu$$

indem durch n und ν die positiven Normalen der Ebenen AA_1A_2 und BB_1B_2 bezeichnet werden. Nun ist (1)

$$\cos xn \cos x\nu + \cos yn \cos y\nu + \cos zn \cos z\nu = \cos n\nu$$

folglich*)

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} = 4\, AA_1A_2 \,.\, BB_1B_2 \cos n\nu$$

Und wenn die von A und B anfangenden Strecken Einheiten der Geraden f, g, f', g', und n, n' die positiven Normalen der Stellungen fg, $f'g'$ sind, so ist $2AA_1A_2 = \sin fg$, u. s. w., folglich**)

$$\begin{vmatrix} \cos ff' & \cos fg' \\ \cos gf' & \cos gg' \end{vmatrix} = \sin fg \sin f'g' \cos nn'$$

5. Das 4fache Product der Dreiecke AA_1A_2, BB_1B_2 mit dem Cosinus des Winkels ihrer Ebenen ist ebensowenig zweideutig als die dafür gegebene Determinante. Nach beliebiger Annahme der positiven Richtungen ihrer Normalen und nach übereinstimmender Annahme des positiven Sinnes jeder Ebene d. h. des Sinnes der Drehung, durch welche positive Winkel und Flächen beschrieben werden, sind die Zeichen der Dreiecke und des Winkels bestimmt, welchen die eine Ebene beschreiben muss, bis dass ihre positive Normale mit der positiven Normale der andern Ebene zusammenfällt. Wenn als die positive Richtung einer Normale die entgegengesetzte angenommen wird, so wechseln zwei Factoren des obigen Products das Zeichen, nämlich ein Dreieck und der Cosinus des Flächenwinkels, weil der Winkel um 180^0 sich ändert; also bleibt das Product unverändert.

Das 4fache Product der Dreiecke AA_1A_2, BB_1B_2 mit dem Cosinus des Flächenwinkels ist $4\, AA_1A_2 \,.\, NN_1N_2$, wenn man durch NN_1N_2 die Projection von BB_1B_2 auf die Ebene AA_1A_2 bezeichnet. Die aus den Paaren AA_1, AA_2 und NN_1, NN_2 gebildete Determinante $\Sigma \pm c_{11} c_{22}$ ist von der aus den Paaren AA_1, AA_2 und BB_1, BB_2 gebildeten nicht verschieden, weil NN_1 und BB_1 durch dieselben Ebenen auf AA_1 projicirt werden, u. s. w. (Staudt).

---

*) Staudt a. a. O.

**) Gauss und Staudt a. a. O. Dieser Satz, welchen Gauss durch sphärische Trigonometrie begründet hatte, kann auch als Grundlage der sphärischen Trigonometrie benutzt werden.

Die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \cos af & \cos ag & \cos ah \\ \cos bf & \cos bg & \cos bh \\ \cos cf & \cos cg & \cos ch \end{vmatrix} = \sin abc \sin fgh$$

$$\begin{vmatrix} \cos af & \cos ag \\ \cos bf & \cos bg \end{vmatrix} = \sin ab \sin fg \cos ab^{\wedge} fg$$

haben zufolge der angegebenen Werthe die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie unverändert bleiben, jene, während die gegenseitige Lage der Raumwinkel abc, fgh beliebig verändert wird, diese, während bei unveränderter Grösse des Flächenwinkels $ab^{\wedge}fg$ die gegenseitige Lage der Winkel ab, fg beliebig verändert wird (Cauchy).

6. Wenn man die Adjuncte des Elements c_{ik} in der Determinante $\Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33}$ durch γ_{ik} bezeichnet, so hat man nach §. 7, 1

$$\Sigma \pm \gamma_{11} \gamma_{22} \gamma_{33} = (\Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33})^2 = (36 AA_1 A_2 A_3 \,.\, BB_1 B_2 B_3)^2$$

Die Elemente γ_{11}, .. sind Flächenproducte von der in (4) betrachteten Art, nämlich

$$\gamma_{11} = \Sigma \pm c_{22} c_{33} = 4 AA_2 A_3 \,.\, BB_2 B_3 \cos_{11}$$
$$\gamma_{12} = \Sigma \pm c_{23} c_{31} = 4 AA_2 A_3 \,.\, BB_3 B_1 \cos_{12}$$

u. s. w., wo $\cos_{11}$, $\cos_{12}$, .. die Cosinus der von den Ebenen der Flächen $AA_2 A_3$ und $BB_2 B_3$, $AA_2 A_3$ und $BB_3 B_1$, .. gebildeten Flächenwinkel bedeuten.

Wenn das zweite Tetraeder mit dem ersten zusammenfällt, und wenn die Flächen $2 AA_2 A_3$, $2 AA_3 A_1$, $2 AA_1 A_2$ die Werthe f_1, f_2, f_3 haben, so findet man

$$(6 AA_1 A_2 A_3)^4 = f_1^2 f_2^2 f_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos_{12} & \cos_{13} \\ \cos_{12} & 1 & \cos_{23} \\ \cos_{13} & \cos_{23} & 1 \end{vmatrix}$$

$$(6 AA_1 A_2 A_3)^2 = f_1 f_2 f_3 \sin_{123} \text{*)}$$

wobei $\sin_{123}$ den Sinus der Ecke (§. 15, 3) bedeutet, deren Kanten die positiven Normalen der Ebenen $AA_2 A_3$, $AA_3 A_1$, $AA_1 A_2$ sind,

*) Diese Gleichung ist von Lagrange's Gleichung (sur les pyr. 17) nicht wesentlich verschieden. Vergl. Bretschneider Geometrie 677 und des Verf. Elem. d. Math. Trigonometrie §. 6, 16.

und welche der von den Geraden AA_1, AA_2, AA_3 gebildeten Ecke des Tetraeders so zugeordnet ist, dass die Kugelschnitte der beiden Ecken Polarfiguren sind.

7. Das Product der Summen der Sinus von Ecken oder Winkeln zweier Systeme wird nach §. 6, 1 abgeleitet aus

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya & \cos za \\ 1 & \cos xb & \cos yb & \cos zb \\ . & . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -\cos xa' & -\cos ya' & -\cos za' \\ 1 & -\cos xb' & -\cos yb' & -\cos zb' \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\cos aa' & 1-\cos ab' & . \\ 1-\cos ba' & 1-\cos bb' & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\sin^2\tfrac{1}{2}aa' & 2\sin^2\tfrac{1}{2}ab' & . \\ 2\sin^2\tfrac{1}{2}ba' & 2\sin^2\tfrac{1}{2}bb' & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

Wenn jedes System 5 und mehr Gerade hat, so ist die resultirende Determinante null. Z. B.

$$\Sigma \pm \sin^2\tfrac{1}{2}aa' \sin^2\tfrac{1}{2}bb' \sin^2\tfrac{1}{2}cc' \sin^2\tfrac{1}{2}dd' \sin^2\tfrac{1}{2}ee' = 0$$

Für 2mal 4 Gerade findet man (3)

$$-(\sin bcd + \sin cad + \sin abd - \sin abc)(\sin b'c'd' + \sin c'a'd' + \sin a'b'd' - \sin a'b'd')$$
$$= 16\, \Sigma \pm \sin^2\tfrac{1}{2}aa' \sin^2\tfrac{1}{2}bb' \sin^2\tfrac{1}{2}cc' \sin^2\tfrac{1}{2}dd' \text{ *)}$$

Bei 2mal 3 Geraden ist

$$\begin{vmatrix} 1-\cos aa' & 1-\cos ab' & . \\ 1-\cos ba' & 1-\cos bb' & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & & . \\ 1 & 1-\cos aa' & & . \\ 1 & 1-\cos ba' & & . \\ . & . & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & . & . \\ 1 & -\cos aa' & . & . \\ 1 & -\cos ba' & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

und nach Weglassung der Glieder

$$\begin{vmatrix} \cos xa & . & . \\ \cos xb & . & . \\ \cos xc & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\cos xa' & . & . \\ -\cos xb' & . & . \\ -\cos xc' & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos aa' & . & . \\ -\cos ba' & . & . \\ -\cos ca' & . & . \end{vmatrix}$$

bleibt übrig

$$(1xy)(1xy)' + (1xz)(1xz)' + (1yz)(1yz)'$$
$$= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\cos aa' & -\cos ab' & -\cos ac' \\ 1 & -\cos ba' & -\cos bb' & -\cos bc' \\ 1 & -\cos ca' & -\cos cb' & -\cos cc' \end{vmatrix}$$

---

*) Ein entsprechender polyedrometrischer Satz ist von Joachimsthal Crelle J. 40 p. 42 ohne genauere Angabe der Zeichen aufgestellt und bewiesen worden.

$$= -4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sin^2\frac{1}{2}aa' & \sin^2\frac{1}{2}ab' & \sin^2\frac{1}{2}ac' \\ 1 & \sin^2\frac{1}{2}ba' & \sin^2\frac{1}{2}bb' & \sin^2\frac{1}{2}bc' \\ 1 & \sin^2\frac{1}{2}ca' & \sin^2\frac{1}{2}cb' & \sin^2\frac{1}{2}cc' \end{vmatrix}$$

Wenn insbesondere a, b, c und a', b', c' auf je einer Ebene liegen, deren positive Normalen n und n' sind, so wird die linke Seite (4)

$$(\sin bc + \sin ca + \sin ab)(\sin b'c' + \sin c'a' + \sin a'b')\cos nn'$$

Für 2mal 3 Gerade einer Ebene findet man unmittelbar

$$(\sin bc + \sin ca + \sin ab)(\sin b'c' + \sin c'a' + \sin a'b')$$

$$= 8\,\Sigma \pm \sin^2\tfrac{1}{2}aa' \sin^2\tfrac{1}{2}bb' \sin^2\tfrac{1}{2}cc'$$

8. Wenn man durch a, b, c die Geraden bezeichnet, auf denen die Radien OA, OB, OC eines Kreises liegen, durch r die Länge eines Radius und durch f, g, h die Quadrate der Seiten BC, CA, AB des eingeschriebenen Dreiecks ABC; wenn man beide Seiten der Gleichung (7)

$$(\sin bc + \sin ca + \sin ab)^2 = 8 \begin{vmatrix} 0 & \sin^2\frac{1}{2}ab & \sin^2\frac{1}{2}ac \\ \sin^2\frac{1}{2}ab & 0 & \sin^2\frac{1}{2}bc \\ \sin^2\frac{1}{2}ac & \sin^2\frac{1}{2}bc & 0 \end{vmatrix}$$

mit $8r^6$ multiplicirt und bemerkt, dass

$$r^2 \sin ab = 2\,OAB \qquad 4\,r^2 \sin^2\tfrac{1}{2}ab = h$$

u. s. w., so erhält man die altbekannte Gleichung

$$(4\,r\,.\,ABC)^2 = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & h & g \\ h & 0 & f \\ g & f & 0 \end{vmatrix} = fgh$$

Wenn man durch a, b, c, d die Geraden bezeichnet, auf denen die Radien OA, OB, OC, OD einer Kugel liegen, durch r die Länge eines Radius, durch f, g, h die Quadrate der Kanten BC, CA, AB, durch f', g', h' die Quadrate der gegenüberliegenden Kanten AD, BD, CD des jener Kugel eingeschriebenen Tetraeders $ABCD$; wenn man beide Seiten der Gleichung (7)

$$(\sin bcd + \sin cad + \sin abd - \sin abc)^2$$

$$= -16 \begin{vmatrix} 0 & \sin^2\frac{1}{2}ab & \sin^2\frac{1}{2}ac & \sin^2\frac{1}{2}ad \\ \sin^2\frac{1}{2}ab & 0 & \sin^2\frac{1}{2}bc & \sin^2\frac{1}{2}bd \\ \sin^2\frac{1}{2}ac & \sin^2\frac{1}{2}bc & 0 & \sin^2\frac{1}{2}cd \\ \sin^2\frac{1}{2}ad & \sin^2\frac{1}{2}bd & \sin^2\frac{1}{2}cd & 0 \end{vmatrix}$$

mit 16 r^8 multiplicirt und erwägt, dass

$$r^3 \sin abd = 6\,OABD \qquad 4\,r^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} ab = h$$

u. s. w., so erhält man

$$(24\,r.ABCD)^2 = - \begin{vmatrix} 0 & h & g & f' \\ h & 0 & f & g' \\ g & f & 0 & h' \\ f' & g' & h' & 0 \end{vmatrix}$$

zur Berechnung des Radius der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel aus den Kanten und dem Volum*). Die rechte Seite bedeutet das 16fache Quadrat der Fläche des Dreiecks, dessen Seiten $\sqrt{ff'}$, $\sqrt{gg'}$, $\sqrt{hh'}$, sind. Vergl. §. 5, 6.

9. Der Abstand der Geraden r_k, welche den Punct N enthält, von der Geraden r_i, welche den Punct M enthält, wird durch den Abstand d des Punctes N von der Ebene MM_iN_k angegeben, wenn MM_i, MN_k mit r_i, r_k parallel sind. Das 6fache Tetraeder MM_iN_kN wird nun sowohl durch $d\,.\,MM_i\,.\,MN_k \sin r_ir_k$ als auch durch $MN\,.\,MM_i\,.\,MN_k \sin rr_ir_k$ ausgedrückt, wobei r die Gerade bedeutet, auf der MN liegt. Daher hat man (3)

$$d \sin r_ir_k = MN \sin rr_ir_k$$

$$d \sin r_ir_k \sin xyz = \begin{vmatrix} MN\cos xr & \cos xr_i & \cos xr_k \\ MN\cos yr & \cos yr_i & \cos yr_k \\ MN\cos zr & \cos zr_i & \cos zr_k \end{vmatrix}$$

Unter der Voraussetzung $\sin xyz = 1$ bezeichne man $d \sin r_ir_k$ durch h_{ik}, und $\cos xr_i$, $\cos yr_i$, $\cos zr_i$ durch a_i, b_i, c_i. Dann ist

$$h_{ik} = \begin{vmatrix} x_k - x_i & a_i & a_k \\ y_k - y_i & b_i & b_k \\ z_k - z_i & c_i & c_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i & a_k & x_k \\ b_i & b_k & y_k \\ c_i & c_k & z_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_k & a_i & x_i \\ b_k & b_i & y_i \\ c_k & c_i & z_i \end{vmatrix}$$

$$= a_i\alpha_k + b_i\beta_k + c_i\gamma_k + \alpha_ia_k + \beta_ib_k + \gamma_ic_k$$

---

*) In diese Form ist die von Jungius (Biographie von Guhrauer 1850 p. 297) und neuerlich von Carnot (Mém. sur la relation . . 12) gefundene Relation durch Joachimsthal l. c. (27) gebracht worden. Eine geometrische Ableitung derselben hat Staudt Crelle J. 57 p. 88 gegeben.

mithin $h_{ik} = h_{ki}$, $h_{ii} = 0$, $a_i\alpha_i + b_i\beta_i + c_i\gamma_i = 0$. Hieraus folgt nach §. 3, 7*)

$$\begin{vmatrix} h_{11} & a_1 & b_1 & c_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ h_{17} & a_7 & b_7 & c_7 & \alpha_7 & \beta_7 & \gamma_7 \end{vmatrix} = 0$$

und nach §. 6, 1

$$\Sigma \pm h_{11} h_{22} \ldots = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \ldots & a_1 & \ldots \\ \alpha_2 & \ldots & a_2 & \ldots \\ . & \ldots & . & \ldots \end{vmatrix}$$

$$\Sigma \pm h_{11} \ldots h_{77} = 0$$

$$\Sigma \pm h_{11} \ldots h_{66} = - \begin{vmatrix} a_1 & \ldots & \alpha_1 & \ldots \\ . & \ldots & . & \ldots \\ a_6 & \ldots & \alpha_6 & \ldots \end{vmatrix}^2$$

10. Wenn man 4 Gerade des Raumes durch a, b, c, d, und Ebenen, die mit den Paaren ad, bd, cd, bc, ca, ab parallel sind, der Reihe nach durch α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 bezeichnet, so folgt aus den Gleichungen (4)

$$\begin{aligned} \sin ab \sin cd \cos\gamma\gamma_1 &= \cos ac \cos bd - \cos bc \cos ad \\ \sin bc \sin ad \cos\alpha\alpha_1 &= \cos ba \cos cd - \cos ca \cos bd \\ \sin ca \sin bd \cos\beta\beta_1 &= \cos cb \cos ad - \cos ab \cos cd \end{aligned}$$

durch Addition

$$\text{(I)} \qquad \sin ab \sin cd \cos\gamma\gamma_1 + \sin bc \sin ad \cos\alpha\alpha_1 + \sin ca \sin bd \cos\beta\beta_1 = 0$$

weil $\cos ba = \cos ab$ u. s. w. Man bestimmt willkürlich für jede Ebene die positive Normale und den positiven Sinn u. s. w. Dieselbe Gleichung gilt für 4 Ebenen a, b, c, d, indem man die Geraden ad .. durch α, .. bezeichnet**). In diesem Falle bestimmt man willkürlich die positiven Richtungen der Geraden, und demgemäss durch Drehungen von einerlei Sinn die Flächenwinkel, deren Kanten die Geraden sind.

---

*) Brioschi Crelle J. 50 p. 236.

**) Joachimsthal Crelle J. 40 p. 45.

Die entsprechende Gleichung für 4 Puncte A, B, C, D ist*)

$$\text{(II)} \quad AB.CD\cos\gamma\gamma_1 + BC.AD\cos\alpha\alpha_1 + CA.BD\cos\beta\beta_1 = 0$$

wenn durch α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 die Geraden bezeichnet werden, auf denen AD, BD, CD, BC, CA, AB liegen. Man hat nämlich durch Projection

$$\begin{aligned} AB\cos\gamma\gamma_1 &= AD\cos\alpha\gamma + DB\cos\beta\gamma \\ BC\cos\alpha\alpha_1 &= BD\cos\beta\alpha + DC\cos\gamma\alpha \\ CA\cos\beta\beta_1 &= CD\cos\gamma\beta + DA\cos\alpha\beta \end{aligned}$$

Indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit CD, AD, BD multiplicirt und summirt, erhält man die angegebene Relation, weil $AD = -DA$, u. s. w.

Um den Zusammenhang der Gleichungen (I) und (II) zu erkennen, bezeichne man die Ebenen, auf welchen die Flächen des Tetraeders ABC, ACD, CBD, BAD liegen, der Reihe nach durch d, b, a, c, und die Geraden, auf denen die Kanten AB, BC, . . liegen, durch cd, ad, . . . Dann ist auch dem Zeichen nach (§. 15, 3)

$$\begin{aligned} 6ABCD.CA &= AB.AC.CA.AD\sin cd^{\wedge}bd\sin bd^{\wedge}bc\sin db \\ &= 4ABC.ACD\sin bd \end{aligned}$$

und durch Vertauschung

$$6BADC.BD = 4BAD.BDC\sin ca$$

Nun ist $BADC = ABCD$, $BDC = CBD$, also erhält man durch Multiplication, wenn man das Product der Flächen des Tetraeders durch p bezeichnet,

$$9ABCD^2.CA.BD = 4p\sin ca\sin bd$$

und daher **)

$$\text{(III)} \quad \frac{9ABCD^2}{4p} = \frac{\sin ca\sin bd}{CA.BD} = \frac{\sin ab\sin cd}{AB.CD} = \frac{\sin bc\sin ad}{BC.AD}$$

Es kann also von den Gleichungen (I) und (II) eine aus der andern abgeleitet werden.

---

*) Carnot mém. sur la relation qui existe etc. 27.

**) Bretschneider Geometrie §. 677.

11. Wenn bei den obigen Voraussetzungen (1) der Nullpunct der orthogonalen Coordinaten durch O, die Quadrat-Distanzen $A_i B_k{}^2$, $OA_i{}^2$, $OB_k{}^2$ durch d_{ik}, r_i, ϱ_k bezeichnet werden, so ist

$$r_i = x_i{}^2 + y_i{}^2 + z_i{}^2 \qquad \varrho_k = \xi_k{}^2 + \eta_k{}^2 + \zeta_k{}^2$$
$$d_{ik} = (x_i - \xi_k)^2 + (y_i - \eta_k)^2 + (z_i - \zeta_k)^2$$
$$= r_i + \varrho_k - 2x_i\xi_k - 2y_i\eta_k - 2z_i\zeta_k$$

componirt aus r_i, 1, x_i, y_i, z_i und 1, ϱ_k, $-2\xi_k$, $-2\eta_k$, $-2\zeta_k$, und nach §. 6, 1

$$\Sigma \pm d_{00} d_{11} \ldots = \begin{vmatrix} r_0 & 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \varrho_0 & -2\xi_0 & -2\eta_0 & -2\zeta_0 \\ 1 & \varrho_1 & -2\xi_1 & -2\eta_1 & -2\zeta_1 \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

folglich

$$\Sigma \pm d_{00} \ldots d_{55} = 0$$
$$\Sigma \pm d_{00} \ldots d_{44} = 8(r\,1\,x\,y\,z)(\varrho\,1\,\xi\,\eta\,\zeta)$$
$$\Sigma \pm d_{00} \ldots d_{33}$$
$$= -4(r\,1\,x\,y)(\varrho\,1\,\xi\,\eta) - 4(r\,1\,y\,z)(\varrho\,1\,\eta\,\zeta) - 4(r\,1\,z\,x)(\varrho\,1\,\zeta\,\xi)$$
$$- 8(r\,x\,y\,z)(1\,\xi\,\eta\,\zeta) - 8(1\,x\,y\,z)(\varrho\,\xi\,\eta\,\zeta)$$

wobei

$$(r\,1\,x\,y\,z) = \begin{vmatrix} r_0 & 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

u. s. w. gesetzt ist.

Wenn man 2 Reihen jedes Systems die eine durch r_0, die andre durch ϱ_0 dividirt hat, so erhält man bei unendlich grossen r_0, ϱ_0

$$\frac{d_{0k}}{r_0} = 1 \qquad \frac{1}{r_0} = \frac{x_0}{r_0} = \frac{y_0}{r_0} = \frac{z_0}{r_0} = 0$$
$$\frac{d_{i0}}{\varrho_0} = 1 \qquad \frac{1}{\varrho_0} = \frac{\xi_0}{\varrho_0} = \frac{\eta_0}{\varrho_0} = \frac{\zeta_0}{\varrho_0} = 0$$

und daher die einfacheren Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & . & d_{15} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{51} & . & . & d_{55} \end{vmatrix} = 0$$

$$(\text{II})\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & . & d_{14} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{41} & . & . & d_{44} \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ . & . & . & . \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ . & . & . & . \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}$$

$$= 288\, A_1 A_2 A_3 A_4 \,.\, B_1 B_2 B_3 B_4 \ (3)$$

$$(\text{III})\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & d_{13} \\ . & . & . & . \\ 1 & d_{31} & . & d_{33} \end{vmatrix} = -4(1\,x\,y)(1\,\xi\,\eta) - 4(1\,x\,z)(1\,\xi\,\zeta) - 4(1\,y\,z)(1\,\eta\,\zeta)$$

$$= -4\, A_1 A_2 A_3 \,.\, B_1 B_2 B_3 \cos n\nu \ (4)$$

wobei

$$(1\,x\,y) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

Wenn die Puncte des zweiten Systems der Reihe nach mit den Puncten des ersten Systems, ξ_k, η_k, ζ_k, ϱ_k, mit x_k, y_k, z_k, r_k zusammenfallen, so ist $d_{ik} = d_{ki}$ und $d_{ii} = 0$.

12. Die Gleichung (I) ist unter der Voraussetzung, dass das zweite System mit dem ersten zusammenfällt ($d_{ik} = d_{ki}$, $d_{ii} = 0$), als Gleichung zwischen den Strecken, welche 5 Puncte des Raumes unter einander verbinden, von Cayley 1841 Cambr. math. J. 2 p. 268 in der obigen Gestalt und durch Mittel, welche von den oben angewandten nicht wesentlich verschieden sind, aufgestellt worden. Diese besondere Gleichung kommt in anderer Gestalt bei Lagrange sur les pyr. 19 vor, und ist wiederholt jedoch ohne übersichtliche Resultate von Carnot (Géom. de pos. 359; Mém. sur la relation qui existe etc. 58) bearbeitet worden. Vermöge derselben Gleichung ist z. B. d_{15} durch die übrigen Strecken bestimmt, und zwar zweideutig, in Uebereinstimmung mit der Construction, durch welche jene Strecke aus den übrigen gefunden wird.

Die Gleichungen (II) und (III), welche Staudt a. a. O. gegeben hat, sind in obige Gestalt durch Sylvester Philos. Mag. 1852, II p. 335 gebracht worden. Dieselben enthalten den von Jungius (Biographie von Guhrauer p. 297) und Euler Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158 gegebenen Ausdruck des Tetraedervolums durch

die Kanten, sowie den altbekannten Ausdruck der Dreiecksfläche durch die Seiten a, b, c

$$-16 A_1 A_2 A_3^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} .$$

Vergl. §. 3, 4 und §. 5, 6. Die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

enthält die Bedingung, unter der die Puncte A_1, A_2, A_3, A_4 auf einer Ebene liegen, und stimmt überein mit der Gleichung zwischen den Strecken, welche diese Puncte unter einander verbinden (Jungius und Euler Acta Petrop. 6, I p. 3).

Unter der Bedingung

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ . & . & . & . \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

liegen die Puncte A_1, A_2, A_3 auf einer Geraden. Bei jeder Lage der 3 Puncte auf einer Geraden verschwindet ein Divisor dieser Determinante (§. 5, 6).

13. Die aus den Elementen d_{ik} gebildeten Determinanten können aus den Determinanten abgeleitet werden, deren Elemente Producte von zwei Strecken AA_i, BB_k mit dem Cosinus des Winkels ihrer Geraden sind. Wenn man AB^2, AB_k^2, A_iB^2 durch d_{00}, d_{0k}, d_{i0} bezeichnet, so ist (1, III)

$$-2c_{ik} = d_{ik} - d_{i0} - d_{0k} + d_{00}$$

Daher wird die Determinante $m$ten Grades

$$(-2)^m \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & . \\ c_{21} & c_{22} & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . \\ 1 & d_{11} - d_{10} - d_{01} + d_{00} & d_{12} - d_{10} - d_{02} + d_{00} & . \\ 1 & d_{21} - d_{20} - d_{01} + d_{00} & d_{22} - d_{20} - d_{02} + d_{00} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

nach Verbindung der ersten Colonne mit den übrigen Colonnen

$$= \begin{vmatrix} 1 & d_{01}-d_{00} & d_{02}-d_{00} & . \\ 1 & d_{11}-d_{10} & d_{12}-d_{10} & . \\ 1 & d_{21}-d_{20} & d_{22}-d_{20} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . \\ d_{00} & 1 & d_{01}-d_{00} & . \\ d_{10} & 1 & d_{11}-d_{10} & . \\ d_{20} & 1 & d_{21}-d_{20} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & d_{00} & d_{01} & . \\ 1 & d_{10} & d_{11} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

eine Determinante $(m+2)$ten Grades. Ebenso wird die Determinante $(m+1)$ten Grades

$$(-2)^{m-2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & c_{11} & c_{12} & . \\ 1 & c_{21} & c_{22} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & -2c_{11} & -2c_{12} & . \\ 1 & -2c_{21} & -2c_{22} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & d_{11} & d_{12} & . \\ 1 & d_{21} & d_{22} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

eine Determinante desselben Grades durch Verbindung der ersten Colonne mit den folgenden Colonnen und der ersten Zeile mit den folgenden Zeilen.

Aus den bewiesenen Sätzen folgt: das Product von zwei planen Polygon-Flächen mit dem Cosinus des Winkels φ ihrer Ebenen, sowie das Product von zwei Polyeder-Volumen ist eine ganze Function der Quadrate der Strecken, welche die Eckpuncte der einen Figur mit denen der andern verbinden (Staudt a. a. O.).

Die planen Polygone $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots$, $B_1 B_2 B_3 B_4, \ldots$, haben die Flächen

$$A_1 A_2 A_3 + A_1 A_3 A_4 + \ldots, \quad B_1 B_2 B_3 + B_1 B_3 B_4 + \ldots$$

Daher ist $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots \times B_1 B_2 B_3 B_4 \ldots \times \cos\varphi$

$$= A_1 A_2 A_3 \,.\, B_1 B_2 B_3 \cos\varphi + A_1 A_3 A_4 \,.\, B_1 B_2 B_3 \cos\varphi + \ldots$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & d_{33} \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} \end{vmatrix} - \dots$$

Eine mehrseitige Pyramide lässt sich aus Tetraedern zusammensetzen, ein Polyeder aus Pyramiden, die einen Eckpunct des Polyeders zur gemeinschaftlichen Spitze haben und deren Basen die Flächen des Polyeders sind. Vergl. des Verf. Elem. d. Math. Stereometrie §. 8. Demnach kann das Product der Volume von zwei Polyedern als Summe von Producten aus jedesmal zwei Tetraedern, mithin als Summe von Determinanten 5ten Grades der angegebenen Art dargestellt werden.

14. Wenn die Puncte $A_1, A_2, \dots$ auf einer gegebenen Kugel um das Centrum B, und die Puncte $B_1, B_2, \dots$ auf einer gegebenen Kugel um das Centrum A liegen, so ist

$$A_iB^2 + AB_k^2 - AB^2 = p$$

eine gegebene Grösse, und

$$d_{ik} = A_iB_k^2 = p - 2c_{ik}$$

ein Ausdruck von 4 Gliedern, so dass man nach §. 6, 1

$$\text{(I)} \qquad \Sigma \pm d_{11} \dots d_{55} = 0$$

findet für 2mal 5 Puncte je einer Kugel. U. s. w. Auch kann man sich der Substitution

$$-2c_{ik} = d_{ik} - p$$

bedienen und erhält

$$(-2)^m \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & . \\ c_{21} & c_{22} & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11}-p & d_{12}-p & . \\ d_{21}-p & d_{22}-p & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p & p & . \\ 1 & d_{11} & d_{12} & . \\ 1 & d_{21} & d_{22} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & . \\ d_{21} & d_{22} & . \\ . & . & . \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & d_{11} & d_{12} & . \\ 1 & d_{21} & d_{22} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{vmatrix} d_{11} & . & . & d_{14} \\ . & . & . & . \\ d_{41} & . & . & d_{44} \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & . & d_{14} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{41} & . & . & d_{44} \end{vmatrix} = 0$$

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{vmatrix} d_{11} & . & d_{13} \\ . & . & . \\ d_{31} & . & d_{33} \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & d_{13} \\ . & . & . & . \\ 1 & d_{31} & . & d_{33} \end{vmatrix} + 8\Sigma \pm c_{11}c_{22}c_{33} = 0$$

für 2mal 4 und 2mal 3 Puncte je einer Kugel. Also ist (11)

$$\Sigma \pm d_{11} \,..\, d_{44} + 288\,p\,.\,A_1A_2A_3A_4\,.\,B_1B_2B_3B_4 = 0\text{*)}$$

und wenn bei zwei Dreiecken einer Ebene die Centren der umgeschriebenen Kreise durch B und A bezeichnet werden,

$$\Sigma \pm d_{11}\,.\,d_{33} = p\,.\,A_1A_2A_3\,.\,B_1B_2B_3$$

Wenn man durch S einen gemeinschaftlichen Punct der beiden Kugeln oder Kreise bezeichnet, so hat man

$$p = AS^2 + BS^2 - AB^2 = 2\,AS\,.\,BS\cos w$$

wobei w den Winkel der Geraden AS, BS d. i. den Winkel der beiden Kugeln oder der beiden auf einer Ebene liegenden Kreise bedeutet. Man erkennt hieraus, dass die Determinante $\Sigma \pm d_{11} \,..\, d_{44}$, deren Elemente die Quadrate der Strecken sind, welche 4 Puncte mit 4 andern Puncten verbinden, dem Product der beiden Tetraedervolume proportional ist, und übrigens nur von der Grösse und dem Abstand der umgeschriebenen Kugeln abhängt. Sie ist null, wenn die beiden Kugeln sich rechtwinkelig schneiden, und insbesondere auch dann, wenn die 4 Puncte des einen Systems auf einem Kreise liegen.

Die Determinante $\Sigma \pm d_{11} \,..\, d_{44}$ ist die erste unter den Subdeterminanten 4ten Grades, welche zu dem System der 25 Elemente

$$\begin{matrix} 0 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & . & d_{14} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{41} & . & . & d_{44} \end{matrix}$$

---

*) Siebeck Crelle J. 62 p. 151.

gehören. Die übrigen Subdeterminanten desselben Grades können aus jener abgeleitet werden; man findet z. B.

$$\begin{vmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ . & . & . & . \\ 1 & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix} = -288\, A_1 A_2 A_3 A_4 \,.\, B B_2 B_3 B_4$$

weil bei der Vereinigung des Punctes B_1 mit dem Centrum B

$$p = AB^2 + BA_1{}^2 - AB^2 = d_{11} = d_{21} = d_{31} = d_{41}$$

Beim Zusammenfallen der beiden Systeme ist $d_{ki} = d_{ik}$, $d_{ii} = 0$, $p = 2AA_1{}^2$, und man erhält ausser der Gleichung zwischen den Strecken, welche 5 Puncte einer Kugel unter einander verbinden (Cayley Cambr. math. J. 2 p. 268), die oben (8) bewiesenen Gleichungen.

15. Wenn die sphärischen Dreiecke $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ auf einer Kugel liegen, deren Radius eine Längeneinheit ist, und die Puncte A_4, B_4 im Centrum O dieser Kugel vereint sind, so ist

$$\Sigma \pm d_{11} \ldots d_{44} + 288 p \,.\, A_1 A_2 A_3 O \,.\, B_1 B_2 B_3 O = 0 \quad (14)$$
$$d_{44} = 0, \quad d_{14} = d_{24} = d_{34} = d_{41} = d_{42} = d_{43} = 1$$

und übrigens

$$d_{ik} = 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} A_i B_k = 2 - 2 \cos A_i B_k$$

Nun ist

$$\Sigma \pm d_{11} \ldots d_{44} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . \\ 1 & 2-2\cos A_1 B_1 & . & . \\ 1 & 2-2\cos A_2 B_1 & . & . \\ 1 & 2-2\cos A_3 B_1 & . & . \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . \\ 1 & \cos A_1 B_1 & . & . \\ 1 & \cos A_2 B_1 & . & . \\ 1 & \cos A_3 B_1 & . & . \end{vmatrix}$$

und $36 A_1 A_2 A_3 O \,.\, B_1 B_2 B_3 O = \sin A_1 A_2 A_3 \sin B_1 B_2 B_3$ (3)

$$= \begin{vmatrix} \cos A_1 B_1 & \cos A_1 B_2 & \cos A_1 B_3 \\ \cos A_2 B_1 & \cos A_2 B_2 & \cos A_2 B_3 \\ \cos A_3 B_1 & \cos A_3 B_2 & \cos A_3 B_3 \end{vmatrix}$$

folglich durch Addition*)

$$\begin{vmatrix} 2p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos A_1 B_1 & \cos A_1 B_2 & \cos A_1 B_3 \\ 1 & \cos A_2 B_1 & \cos A_2 B_2 & \cos A_2 B_3 \\ 1 & \cos A_3 B_1 & \cos A_3 B_2 & \cos A_3 B_3 \end{vmatrix} = 0$$

---

*) Siebeck a. a. O.

Um die Grösse p sphärisch auszudrücken, braucht man die sphärischen Centren P und Q der Kreise $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$. Die Geraden OP, OQ enthalten die Centren B, A der Kugeln $A_1A_2A_3O$, $B_1B_2B_3O$ und sind Diameter, also ist $\cos PQ$ der Cosinus des von den Geraden AO, BO gebildeten Winkels, mithin

$$p = 2AO.BO\cos PQ, \qquad 2p = OP.OQ\cos PQ$$

Nun ist $OP\cos PA_1 = OA_1 = 1$, $OQ\cos QB_1 = OB_1 = 1$, folglich

$$2p = \frac{\cos PQ}{\cos PA_1 \cos QB_1}$$

Wenn die Kreise $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ in R sich schneiden, so hat man

$$\cos PQ = \cos PR\cos RQ + \sin PR\sin RQ\cos QRP$$
$$2p = 1 + \operatorname{tang} PR\operatorname{tang} RQ\cos QRP$$

Bei rechtwinkelig sich schneidenden Kreisen ist $2p = 1$.

Weitere Untersuchungen auf diesem durch Cayley und Joachimsthal eröffneten Gebiet haben Kronecker Crelle J. 72 p. 152, Bauer Münchener Acad. 1873 p. 345, Darboux Ann. de l'éc. normale 1872 p. 323, Frobenius Crelle J. 79 p. 185 gegeben.

§. 17. Polygonometrische und polyedrometrische Relationen.

1. Wenn die Seiten AB, BC, .., MN, NA eines beliebigen Polygons nach willkürlicher Festsetzung der positiven Richtungen der Geraden, auf denen sie liegen, die Werthe a_1, a_2, .., a_n haben, und $\cos_{pi}$ den Cosinus des Winkels bedeutet, welchen die Gerade der $i$ten Seite mit einer beliebigen Geraden bildet, so ist*)

$$a_1\cos_{p1} + a_2\cos_{p2} + \ldots + a_n\cos_{pn} = 0$$

Sind nämlich A_1, B_1, .. die orthogonalen Projectionen von A, B, .. auf eine beliebige Gerade, so hat man

$$A_1B_1 + B_1C_1 + \ldots + M_1N_1 + N_1A_1 = 0$$

*) Lexell Nov. Comm. Petrop. 19 p. 187. L'Huilier polygonométrie p. 20. Carnot géom. de pos. 254.

unter der Voraussetzung, dass $A_1 B_1 = -B_1 A_1$, u. s. w. Nun ist allgemein $A_1 B_1 = AB \cos_{p1}$, wie auch die Richtung der positiven Strecken auf den Geraden, deren Strecken AB und $A_1 B_1$ sind, angenommen werde, weil bei Vertauschung einer Richtung mit der entgegengesetzten zwei der Grössen $A_1 B_1$, AB, $\cos_{p1}$ das Zeichen wechseln. Durch Substitution der Werthe von $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, .. findet man die angegebene Fundamentalgleichung der Polygonometrie.

Wenn umgekehrt $a_1, a_2, .., a_n$ Strecken von gegebener Richtung und Grösse sind, und $\cos_{pi}$ den Cosinus des Winkels bedeutet, welchen die Gerade, auf welcher die $i$te Strecke liegt, mit einer beliebigen Geraden bildet, und die Summe

$$S = a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + .. + a_n \cos_{pn}$$

verschwindet, wie auch die willkürliche Gerade angenommen werde, so erhält man ein geschlossenes Polygon, wenn man nach willkürlicher Anordnung der Strecken, ohne deren Richtungen zu verändern, mit dem Ende der ersten den Anfang der zweiten, mit dem Ende der zweiten den Anfang der dritten u. s. f. vereint. Gesetzt, das Ende der letzten Strecke fiele mit dem Anfang der ersten nicht zusammen, so würde die Summe S im Allgemeinen nicht verschwinden, was der Voraussetzung widerstreitet.

2. Der Inhalt eines planen Dreiecks ist unzweideutig bestimmt, wenn nicht nur der Sinn, in welchem sein Perimeter zu durchlaufen ist, sondern auch die positive Richtung der Normalen seiner Ebene nebst dem positiven Sinn der Ebene gegeben ist. Der Beurtheiler stelle sich so auf die Ebene, dass ihm die positive Richtung der Normalen aufwärts gehend erscheint; je nachdem nun die durch die Ordnung der Eckpuncte gegebene Drehung mit der Drehung, durch welche positive Winkel und Flächen beschrieben werden, einerlei Sinnes ist oder nicht, wird der Inhalt als positiv oder negativ bezeichnet. In gleicher Weise ist zur unzweideutigen Bestimmung des Inhalts jedes planen Polygons der Sinn seines Perimeters erforderlich.

Bei einer Fläche eines gegebenen Polyeders kann der Sinn ihres Perimeters willkürlich bestimmt werden. Bei jeder mit

dieser Fläche durch eine gemeinschaftliche Kante MN verbundenen Fläche des Polyeders wird der Sinn des Perimeters so angenommen, dass die vereinigten Theile der beiden Perimeter einander entgegengesetzt sind, also der eine durch MN, der andre durch NM ausgedrückt wird*). Wenn z. B. eine Fläche des Tetraeders $ABCD$ durch ABC ausgedrückt wird, so sind die übrigen Flächen durch CBD, BAD, ACD auszudrücken. Ist $ABCD$ eine Fläche eines Hexaeders, so sind $DCC'D'$, $CBB'C'$, $BAA'B'$, $ADD'A'$, $D'C'B'A'$ die übrigen Flächen. U. s. w.

Wenn nun die in der angegebenen Weise ausgedrückten Flächen eines Polyeders nach willkürlicher Festsetzung der positiven Richtung der Normalen und des positiven Sinnes einer jeden Ebene die Werthe α_1, α_2, .., α_n haben, und wenn durch $\cos_{pi}$ der Cosinus des Winkels bezeichnet wird, welchen die Ebene der $i$ten Fläche mit einer beliebig hinzugefügten Ebene bildet, so ist**)

$$\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \ldots + \alpha_n \cos_{pn} = 0$$

Beweis. Man bezeichne die Normalprojectionen der Eckpuncte A, B, C, .. auf die beliebig angenommene Ebene durch A_1, B_1, C_1, ... Die Summe Σ der Projectionen der Polyederflächen besteht aus der Summe aller Dreiecke, welche einen beliebigen Punct O der Projectionsebene zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Basen die Seiten der durch Projection der Polyederflächen entstandenen Polygone sind. Die Summe dieser Dreiecke enthält aber zu jedem Dreieck OM_1N_1 auch das entgegengesetzte ON_1M_1, folglich verschwindet sie und mit ihr die Summe Σ. Nun ist die Projection der $i$ten Fläche

$$F_1 G_1 H_1 \ldots = FGH \ldots \cos_{pi}$$

also verschwindet die Summe $\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \ldots$

*) Diese Ansicht ist von Möbius Statik §. 55 angedeutet, in den Leipziger Berichten 1865 p. 31 als »Gesetz der Kanten« aufgestellt worden. Vergl. des Verf. Elem. d. Math. Stereom. §. 8, 16.

**) L'Huilier théorèmes de polyedr. 1799 (Mém. présentés à l'Inst. 1. 1805 p. 264). Carnot l. c. Die Voraussetzungen, unter welchen die Gleichung gültig ist, werden in diesen Schriften nicht genau angegeben.

Zusatz. Construirt man auf den Normalen der Flächen des Polyeders je eine Strecke $a_1, a_2, .., a_n$ proportional den Werthen $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ der Flächen, zu denen die Normalen gehören, so ist zufolge der bewiesenen Gleichung auch

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + .. + a_n \cos_{pn} = 0$$

wo nun unter $\cos_{pi}$ der Cosinus des Winkels verstanden werden kann, den die Gerade, auf der die Strecke a_i liegt, mit der Normale einer beliebigen Ebene, d. h. mit einer beliebigen Geraden bildet. Daher erhält man (1) ein geschlossenes Polygon, wenn man, ohne die Richtungen der Strecken $a_1, a_2, .., a_n$ zu verändern, mit dem Ende der ersten Strecke den Anfang der zweiten, dann mit dem Ende der zweiten den Anfang der dritten u. s. f. vereint. Es giebt also für jedes Polyeder ein zugehöriges Polygon, dessen Seiten und Winkel den Flächen und Flächenwinkeln des Polyeders gleich sind, so dass jede polygonometrische Gleichung zwischen den Seiten und Winkeln des Polygons eine polyedrometrische Gleichung zwischen den Flächen und Flächenwinkeln des Polyeders ist.

3. Indem man die beliebige Gerade (Ebene) der Reihe nach mit den einzelnen Geraden (Ebenen) der Polygonseiten (Polyederflächen) vereinigt, erhält man das System von homogenen linearen Gleichungen (1)

$$\begin{array}{c} a_1 \cos_{11} + a_2 \cos_{12} + .. + a_n \cos_{1n} = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_1 \cos_{n1} + a_2 \cos_{n2} + .. + a_n \cos_{nn} = 0 \end{array}$$

worin $\cos_{ii} = 1$, $\cos_{ki} = \cos_{ik}$ ist. Das System

$$\begin{array}{ccc} \cos_{11} & .. & \cos_{1n} \\ . & .. & . \\ \cos_{n1} & .. & \cos_{nn} \end{array}$$

hat die Eigenthümlichkeit, dass alle seine Subdeterminanten 4ten und höhern Grades zufolge des §. 16, 2 bewiesenen Satzes null sind. Man kann also aus dem obigen System für $n = 3$ die Proportion der Seiten eines geradlinigen Dreiecks, für $n = 4$ die Proportion der Seiten eines unebenen geradlinigen Vierecks

und der Flächen eines Tetraeders goniometrisch ausdrücken. Dagegen bleibt die Proportion der Seiten eines andern Polygons und der Flächen eines Polyeders unbestimmt.

Wenn die Seiten des Vierecks $OPQR$ auf den Geraden x, y, z, r liegen, so hat man ausser der Gleichung

$$OP \cos px + PQ \cos py + QR \cos pz + RO \cos pr = 0$$

die 4 besondern Gleichungen, welche durch das Zusammenfallen von p mit x, y, z, r sich ergeben,

$$\begin{aligned}
OP \cos xx + PQ \cos xy + QR \cos xz + RO \cos xr &= 0\\
OP \cos yx + PQ \cos yy + QR \cos yz + RO \cos yr &= 0\\
OP \cos zx + PQ \cos zy + QR \cos zz + RO \cos zr &= 0\\
OP \cos rx + PQ \cos ry + QR \cos rz + RO \cos rr &= 0
\end{aligned}$$

Aus diesem System folgt nach Multiplication mit OP, PQ, QR, $-RO$ durch Addition die Gleichung, welche eine Seite durch die übrigen Seiten und deren Winkel bestimmt. Zufolge desselben Systems verhalten sich OP, PQ, QR, RO zu einander, wie die Adjuncten einer Zeile des Systems der Coefficienten (§. 8, 2)

$$\begin{matrix}
\cos xx & \cos xy & \cos xz & \cos xr\\
\cos yx & \cos yy & \cos yz & \cos yr\\
\cos zx & \cos zy & \cos zz & \cos zr\\
\cos rx & \cos ry & \cos rz & \cos rr
\end{matrix}$$

Nun ist (§. 16, 3)

$$\begin{vmatrix}
\cos xy & \cos xz & \cos xr\\
\cos yy & \cos yz & \cos yr\\
\cos zy & \cos zz & \cos zr
\end{vmatrix} = \sin xyz \sin yzr$$

u. s. w. Daher folgt*)

$$OP : PQ : QR : RO = \sin yzr : \sin zxr : \sin xyr : -\sin xyz$$

und die Fundamentalgleichung der räumlichen Goniometrie

$$\sin yzr \cos px + \sin zxr \cos py + \sin xyr \cos pz = \sin xyz \cos pr$$

---

*) Andere Ausdrücke dieser Proportion enthält der Aufsatz des Verf. Crelle J. 46 p. 150. Der gleichlautende tetraedrometrische Satz von den Flächen eines Tetraeders ist bekannt. Vergl. oben §. 16, 6.

4. Die Distanzen einer Geraden von 3 Puncten derselben Ebene, so wie die Distanzen einer Ebene von 4 Puncten sind nicht unabhängig von einander, sondern durch eine Gleichung verbunden. Wenn von der Ebene, welche die durch den Nullpunct O gehende Gerade n in N normal schneidet, die gegebenen Puncte A, B, C, D $(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ ..)$ die Distanzen M_1, M_2, M_3, M_4 haben, so findet man durch orthogonale Projection von NA, NB, .. auf n

$$\begin{aligned} M_1 &= NO + x_1 \cos xn + y_1 \cos yn + z_1 \cos zn \\ &\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ M_4 &= NO + x_4 \cos xn + y_4 \cos yn + z_4 \cos zn \end{aligned}$$

4 lineare Gleichungen für NO, $\cos xn$, $\cos yn$, $\cos zn$. Nun sind $\cos xn$, $\cos yn$, $\cos zn$ durch eine Gleichung verbunden (§. 16, 2), folglich auch M_1, M_2, M_3, M_4. In der Auflösung (§. 8, 1)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ . & . & . & . \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \cos xn = \begin{vmatrix} 1 & M_1 & y_1 & z_1 \\ . & . & . & . \\ 1 & M_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

hat $\cos xn$ den Coefficienten $6ABCD : \sin xyz$ (§. 15, 6). Das Element M_1 hat die Adjuncte

$$-\begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = -\frac{2B'C'D'}{\sin yz}$$

wenn $B'C'D'$ die Projection von BCD auf yz durch Parallelen der x ist. Bezeichnet man durch h_1, h_2, h_3, h_4 die Höhen des Tetraeders, so ist (§. 15, 4)

$$B'C'D' \cos xx' = BCD \cos xh_1$$

$$\sin yz \cos xx' = \sin xyz \qquad\qquad 2BCD . h_1 = 6ABCD$$

daher die gesuchte Adjuncte

$$-\frac{6ABCD}{\sin xyz} \; \frac{\cos xh_1}{h_1}$$

u. s. w. Die für $\cos xn$ sich ergebende Gleichung

$$\cos xn + \frac{M_1}{h_1} \cos xh_1 + \frac{M_2}{h_2} \cos xh_2 + \frac{M_3}{h_3} \cos xh_3 + \frac{M_4}{h_4} \cos xh_4 = 0$$

nebst den entsprechenden Gleichungen für $\cos yn$, $\cos zn$ giebt zu erkennen, dass die Strecken 1 der Richtung n, $M_1 : h_1$ der

Richtung h_1, $M_2 : h_2$ der Richtung h_2, u. s. w. mit den Seiten eines Fünfecks parallel und gleich sind (1). Die 2 analogen planimetrischen Gleichungen zeigen an, dass die Strecken -1 der Richtung n, $M_1 : h_1$ der Richtung h_1, u. s. w. mit den Seiten eines Vierecks parallel und gleich sind. Demnach ist (3)

$$\left(\frac{M_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{M_2}{h_2}\right)^2 + \ldots + 2\frac{M_1}{h_1}\frac{M_2}{h_2}\cos_{12} + \ldots = 1$$

die gesuchte Gleichung*).

5. Die Beziehung zwischen 4 Puncten eines Kreises A, B, C, D kann durch die Eigenschaften der Winkel, Strecken, Flächen, welche durch die betrachteten Puncte bestimmt sind, angegeben werden. Nach dem in Euclides' Elementen enthaltenen Theorem ist die Winkeldifferenz $ACB - ADB$ entweder 0 oder 180^0, mithin allgemein**)

$$\text{(I)} \qquad 2(ACB - ADB) = 0$$

wenn die genannten Puncte auf einem Kreise liegen und Winkel von gleichen Zeichen durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben werden. Der Winkel 360^0 ist gleichbedeutend mit 0.

Nach dem Theorem des Ptolemäus (Almagest I, 9) ist ferner

$$\text{(II)} \qquad \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 0$$

wenn die Producte aus den Quadraten der gegenüberliegenden Strecken, welche 4 Kreispuncte A, B, C, D verbinden, durch p, q, r bezeichnet werden. Indem man die Norm des irrationalen Trinomium $= 0$ setzt, findet man die rationale Gleichung zwischen den Quadraten der Strecken, welche durch die genannten Puncte bestimmt sind. Eine der letztern analoge Gleichung giebt es für die Quadrate der Strecken, welche 5 Puncte einer Kugel verbinden.

Endlich kennt man Relationen zwischen 4 Puncten eines Kreises oder 5 Puncten einer Kugel und einem beliebigen andern Puncte, wovon die letztere in einem Theorem Feuerbach's (Unter-

---

*) Die planimetrische Gleichung ist von Salmon plane curves 1852 p. 10, die stereometrische von Kronecker Crelle J. 72 p. 161 auf andern Wegen entwickelt worden.

**) Möbius Kreisverwandtschaft §. 14.

suchung der dreieckigen Pyramide p. 15) enthalten ist, welches CAYLEY (Cambr. math. J. II p. 268) und LUCHTERHANDT (Crelle J. 23 p. 375) reproducirt haben. Dieselben Relationen hat MÖBIUS (Crelle J. 26 p. 26) aus barycentrischen Principien abgeleitet. CAYLEY's Verfahren, das auf dem Gebrauch der Determinanten beruht, ist folgendes.

Die Puncte A, B, C, D eines Kreises seien in Bezug auf ein System orthogonaler Axen, dessen Anfang O ist, durch die Coordinaten x, y; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 gegeben. Man hat, wie bekannt,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a + bx + cy \\ x_1^2 + y_1^2 &= a + bx_1 + cy_1 \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_3^2 + y_3^2 &= a + bx_3 + cy_3 \end{aligned}$$

folglich (§. 8, 2)

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & 1 & x & y \\ x_1^2 + y_1^2 & 1 & x_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_3^2 + y_3^2 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Die Entwickelung dieser Determinante nach den Elementen der ersten Colonne mit Rücksicht auf §. 15, 5 giebt:

$$OA^2 . BCD - OB^2 . CDA + OC^2 . DAB - OD^2 . ABC = 0$$

Wenn man OP normal zur Kreisebene construirt und die Identität (§. 15, 5)

$$OP^2(BCD - CDA + DAB - ABC) = 0$$

zu der vorigen Gleichung addirt, so kommt

$$\text{(IV)} \quad PA^2 . BCD - PB^2 . CDA + PC^2 . DAB - PD^2 . ABC = 0$$

worin P irgend einen Punct des Raumes bedeutet. Insbesondere ist, wenn P mit D zusammenfällt,

$$DA^2 . BCD + DB^2 . CAD + DC^2 . ABD = 0$$

In gleicher Weise seien die Puncte A, B, C, D, E einer Kugel in Bezug auf ein System orthogonaler Axen durch die Coordinaten x, y, z; u. s. w. gegeben. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a + bx + cy + dz \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 &= a + bx_4 + cy_4 + dz_4 \end{aligned}$$

folgt

$$
\text{(V)} \qquad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & 1 & x & y & z \\ . & . & . & . & . \\ x_4{}^2 + y_4{}^2 + z_4{}^2 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0
$$

Die Entwickelung dieser Determinante giebt (§. 15, 6)

$$
\begin{aligned}
\text{(VI)} \qquad OA^2 . BCDE + OB^2 . CDEA + OC^2 . DEAB \\
+ OD^2 . EABC + OE^2 . ABCD = 0
\end{aligned}
$$

worin O irgend einen Punct des Raumes bezeichnet. Nach den in §. 15, 7 angenommenen Bezeichnungen hat man

$$
\mu . OE^2 + \mu_1 . OA^2 + \mu_2 . OB^2 + \mu_3 . OC^2 + \mu_4 . OD^2 = 0
$$

d. h. wenn μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 die coordinirten Coefficienten von E in Bezug auf die Pyramide $ABCD$ sind, so ist für alle Puncte O auf einer um das Centrum E beschriebenen Kugel $\mu_1 . OA^2 + \mu_2 . OB^2 + \mu_3 . OC^2 + \mu_4 . OD^2$ constant (Feuerbach). Insbesondere ist

$$
AB^2 . CDEA + AC^2 . DEAB + AD^2 . EABC + AE^2 . ABCD = 0
$$
$$
\mu . DE^2 + \mu_1 . DA^2 + \mu^2 . DB^2 + \mu_3 . DC^2 = 0
$$

Wenn man die Determinanten (III) und (V) bezüglich mit

$$
\begin{vmatrix} 1 & x^2 + y^2 & -2x & -2y \\ . & . & . & . \\ 1 & x_3{}^2 + y_3{}^2 & -2x_3 & -2y_3 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} 1 & x^2 + y^2 + z^2 & -2x & -2y & -2z \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_4{}^2 + y_4{}^2 + z_4{}^2 & -2x_4 & -2y_4 & -2z_4 \end{vmatrix}
$$

multiplicirt, so findet man $\Sigma \pm d_{00} \,..\, d_{33}$ und $\Sigma \pm d_{00} \,..\, d_{44}$ (§. 6, 4), wobei im ersten Falle

$$
\begin{aligned}
d_{00} &= x^2 + y^2 + x^2 + y^2 - 2x^2 - 2y^2 = 0 \\
d_{01} &= x^2 + y^2 + x_1{}^2 + y_1{}^2 - 2xx_1 - 2yy_1 = AB^2 \\
d_{02} &= x^2 + y^2 + x_2{}^2 + y_2{}^2 - 2xx_2 - 2yy_2 = AC^2
\end{aligned}
$$

u. s. w., im zweiten Falle

$$
\begin{aligned}
d_{00} &= x^2 + y^2 + z^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 = 0 \\
d_{01} &= x^2 + y^2 + z^2 + x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1 = AB^2
\end{aligned}
$$

u. s. w. Daher ist die oben erwähnte Gleichung zwischen den Strecken, welche 4 Puncte eines Kreises verbinden, folgende (Cayley):

$$(\text{VII}) \qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} \\ d_{01} & 0 & d_{12} & d_{13} \\ d_{02} & d_{12} & 0 & d_{23} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

worin d_{ik} das Quadrat der Strecke vom $i$ten bis zum $k$ten Puncte bedeutet.

Die analoge Gleichung zwischen den Strecken, welche 5 Puncte einer Kugel verbinden, lautet (Cayley):

$$(\text{VIII}) \qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} \\ d_{01} & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{02} & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ d_{04} & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Vergl. oben §. 16, 12 und 14.

6. Die gefundenen Relationen (III) bis (VIII) gelten für Puncte einer Linie oder Fläche 2ter Ordnung mit endlichen Hauptaxen, wenn man jede Strecke nach dem parallelen halben Diameter misst*).

Beweis. Man bezeichne durch O den Anfang der mit den Hauptaxen parallelen Coordinaten, durch $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ und t, u, v die Normalprojectionen der Strecke AB und des mit AB parallel gezogenen halben Diameter MN der Fläche auf die Hauptaxen derselben. Dann ist wegen der Aehnlichkeit der Figuren

$$x_1 - x : y_1 - y : z_1 - z : AB = t : u : v : MN$$

Nun sind t, u, v durch die Gleichung

$$at^2 + bu^2 + cv^2 = 1$$

verbunden, folglich

$$a(x_1 - x)^2 + b(y_1 - y)^2 + c(z_1 - z)^2 = \frac{AB^2}{MN^2}$$

---

*) Die Geltung der obigen Sätze für Ellipse und Ellipsoid hat Brioschi Crelle J. 50 p. 236 bemerkt.

Wenn nun der Punct x, y, z auf der Fläche 2ter Ordnung liegt, so hat man

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = a' + b'x + c'y + d'z$$

u. s. w., wie oben, während an die Stelle von OA, OB, AB, .. deren Verhältnisse zu den halben Diametern der Fläche treten, die mit den Strecken parallel sind.

7. Ein Kegelschnitt zweiten Grades ist durch einen seiner Brennpuncte O und 3 andere Puncte A, B, C bestimmt; daher haben 4 Puncte eines Kegelschnitts und ein Brennpunct desselben eine gewisse Relation. Die Rotationsfläche zweiten Grades, welche durch Rotation eines Kegelschnitts um seine Hauptaxe entsteht, ist durch einen ihrer Brennpuncte O und 4 andere Puncte A, B, C, D bestimmt, so dass eine Relation zwischen 5 Puncten einer solchen Fläche und einem ihrer Brennpuncte bestehen muss. Diese Relationen sind von Möbius (Crelle J. 26 p. 29) angegeben und bewiesen worden.

Man kann dieselben aus dem bekannten Satze ableiten, dass der Radius Vector $OA = r$ eines Kegelschnitts oder einer Rotationsfläche der angegebenen Art eine lineare Function der Coordinaten x, y oder x, y, z des Punctes A in Bezug auf beliebige Axen ist. Sind x_1, y_1 oder x_1, y_1, z_1 die Coordinaten von B u. s. w., so hat man

$$\begin{array}{ll} r = a + bx + cy & \qquad r = a + bx + cy + dz \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \qquad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ r_3 = a + bx_3 + cy_3 & \qquad r_4 = a + bx_4 + cy_4 + dz_4 \end{array}$$

folglich (§. 8, 2)

$$\begin{vmatrix} r & 1 & x & y \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ r_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ r_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} r & 1 & x & y & z \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_4 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{d. i. } \alpha r + \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \ldots = 0$$

Die Adjuncten der ersten Colonne mit den andern Colonnen componirt geben null:

$$\alpha + \alpha_1 + \ldots = 0, \quad \alpha x + \alpha_1 x_1 + \ldots = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

Daher ist (§. 15, 5. 6)

$$OA.BCD - OB.CDA + OC.DAB - OD.ABC = 0$$

$$OA.BCDE + OB.CDEA + OC.DEAB + OD.EABC + OE.ABCD = 0$$

Wenn A, B, C, D auf der Rotationsfläche und zugleich auf einer durch O gehenden Ebene liegen, so ist $ABCD = 0$ und

$$BCDE : -CDAE : DABE : -ABCE = BCD : -CDA : DAB : -ABC$$

folglich

$$OA.BCD - OB.CDA + OC.DAB - OD.ABC = 0$$

d. h. die Rotationsfläche wird von einer durch einen ihrer Brennpuncte gelegten Ebene in einer Linie zweiten Grades geschnitten, für welche jener Punct ein Brennpunct ist (Möbius a. a. O.).

Wenn ein Kegelschnitt 4 gegebene Puncte, oder eine Rotationsfläche zweiter Ordnung 5 gegebene Puncte hat, und den Brennpunct O (x, y oder x, y, z), so ist

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + .. = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + .. = 0, \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + .. = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

und bei orthogonalen Coordinaten

$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2, \ldots$$

Das Product der 8 oder 16 conjugirten Werthe

$$(\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + ..)(\alpha_1 r_1 - \alpha_2 r_2 + ..) ..$$

ist eine Form 4ten oder 8ten Grades der r_1^2, r_2^2, .., also eine Function 8ten oder 16ten Grades der x, y oder x, y, z. Bei unendlichen x, y sind r_1, r_2, .. nicht verschieden von $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, und das Product nicht verschieden von

$$r^8(\alpha_1 + \alpha_2 + ..)(\alpha_1 - \alpha_2 + ..) ..$$

Also hat in dem Product die Form 8ten Grades der x, y den Coefficienten

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + ..)(\alpha_1 - \alpha_2 + ..) ..$$

der nach der Voraussetzung null ist.

Wenn insbesondere die 4 gegebenen Puncte auf einem Kreis liegen, so ist

$$\alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 + .. = 0 \ (5)$$

folglich

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2) = (\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_3 r_3^2 + \alpha_4 r_4^2)$$

und nach Subtraction von $(\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2)^2 = (\alpha_3 r_3 + \alpha_4 r_4)^2$

$$\alpha_1 \alpha_2 (r_1 - r_2)^2 = \alpha_3 \alpha_4 (r_3 - r_4)^2$$
$$r_1 - r_2 = \beta(r_3 - r_4)$$

wo β zweideutig bestimmt ist. Nach Elimination von r_1 bleibt

$$(\alpha_1 + \alpha_2) r_2 + (\alpha_3 + \alpha_1 \beta) r_3 + (\alpha_4 - \alpha_1 \beta) r_4 = 0$$

Hier ist wiederum die Summe der Coefficienten null, also das Product der 4 conjugirten Werthe eine Function der x, y niedern als 4ten Grades. Vergl. Fiedler-Salmon Kegelschnitte n⁰ 236, 11.

8. Die einfachste Relation zwischen 5 Puncten des Raumes, A, B, C, D, E, deren Coordinaten in Bezug auf 3 beliebige Axen x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 u. s w. sind, findet man, indem man die Identität (§. 2, 3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0$$

nach den Elementen der ersten Colonne entwickelt und die gefundenen Determinanten 4ten Grades nach §. 15, 6 deutet,

$$\text{(I)} \qquad BCDE + CDEA + DEAB + EABC + ABCD = 0$$

vergl. §. 15, 7. Wenn man die Volume der einzelnen Tetraeder durch ihre Kanten ausdrückt (§. 16, 12), so erhält man eine irrationale Gleichung, deren rechte Seite Null ist und deren linke Seite die Summe der Quadratwurzeln von 5 Determinanten 5ten Grades ist. Um diese Gleichung zu rationalisiren, hat man die Norm der linken Seite gleich Null zu setzen, d. h. das Product aus den 16 Werthen, welche die linke Seite vermöge der Zweideutigkeit von 4 unter jenen Quadratwurzeln annehmen kann*). Die Norm der linken Seite besitzt aber einen rationalen Divisor, zu dessen Auffindung es genügt, die Gleichung (I) mit einem ihrer

*) Vergl. Sylvester Cambr. and Dubl. math. J. 1853 Mai.

Glieder zu multipliciren, weil das Product aus zwei Tetraedern eine rationale Function von den Quadraten der Strecken ist, welche die Eckpuncte des einen Tetraeders mit denen des andern Tetraeders verbinden (§. 16, 12).

Dieser Divisor der rationalisirten Gleichung ist die in §. 16, 12 nach Cayley a. a. O. gegebene Gleichung

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 & d_{45} \\ 1 & d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

für die Quadrate der Strecken, welche 5 Puncte des Raumes verbinden.

Diese Determinante nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt giebt

$$\delta_{01} + \delta_{02} + \delta_{03} + \delta_{04} + \delta_{05} = 0$$

wenn man durch δ_{ik} die Adjuncte des Elements d_{ik} bezeichnet. Nun ist $\delta_{ki} = \delta_{ik}$, $\delta_{ik}{}^2 = d_{ii}\delta_{kk}$ (§. 3, 5 und 8), folglich bei einer bestimmten Auswahl der Zeichen

$$\sqrt{\delta_{11}} + \sqrt{\delta_{22}} = \sqrt{\delta_{33}} + \sqrt{\delta_{44}} + \sqrt{\delta_{55}} = 0$$

womit nach §. 16, 12 die Gleichung (I) übereinstimmt.

Analoge Bemerkungen sind über die Relationen zwischen 4 Puncten einer Ebene, 3 Puncten einer Geraden zu machen. Es ist die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder bei gehöriger Zeichenbestimmung

$$\sqrt{\delta_{11}} + \sqrt{\delta_{22}} + \sqrt{\delta_{33}} + \sqrt{\delta_{44}} = 0$$

übereinstimmend mit $BCD - CDA + DAB - ABC = 0$ d. i.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0$$

und die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\sqrt{\delta_{11}} + \sqrt{\delta_{22}} + \sqrt{\delta_{33}} = 0$$

übereinstimmend mit $AB + BC + CA = 0$ d. i.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichungen ergeben sich auch aus 5, VII und VIII. Wenn nämlich von 5 Puncten einer Kugel einer unendlich fern ist, so ist z. B.

$$\frac{d_{01}}{d_{01}} = \frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{d_{03}}{d_{01}} = \frac{d_{04}}{d_{01}} = 1$$

und die übrigen 4 Puncte liegen auf einer Ebene. Und wenn von 4 Puncten eines Kreises einer unendlich fern ist, so liegen die übrigen 3 Puncte auf einer Geraden.

9. Wenn der Kreis K den Radius r und sein Centrum die rechtwinkeligen Coordinaten a, b hat, wenn der Kreis K_i den Radius r_i und das Centrum a_i, b_i hat, wenn man

$$s_i = (a - a_i)^2 + (b - b_i)^2 - (r - r_i)^2$$

d. i. die Potenz des Punctes a, b in Bezug auf den um das Centrum a_i, b_i mit dem Radius $r - r_i$ beschriebenen Kreis, und analog

$$s_{ik} = (a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2 - (r_i - r_k)^2 = [a - a_k - (a - a_i)]^2 + \ldots$$
$$= s_i + s_k - 2(a - a_i)(a - a_k) - 2(b - b_i)(b - b_k) + 2(r - r_i)(r - r_k) = s_{ki}$$

setzt: so werden die Kreise K_1, K_2, K_3 von dem Kreis K

berührt unter den Bedingungen $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, deren Differenzen 2 lineare Gleichungen für a, b, r geben. Dazu ist*)

$$\begin{vmatrix} a - a_1 & b - b_1 & r - r_1 \\ a - a_2 & b - b_2 & r - r_2 \\ a - a_3 & b - b_3 & r - r_3 \end{vmatrix} = S$$

eine gegebene Function von a, b, r, weil (§. 6, 3)

$$S^2 = \begin{vmatrix} a - a_1 & b - b_1 & r - r_1 \\ a - a_2 & b - b_2 & r - r_2 \\ a - a_3 & b - b_3 & r - r_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -(a - a_1) & -(b - b_1) & r - r_1 \\ -(a - a_2) & -(b - b_2) & r - r_2 \\ -(a - a_3) & -(b - b_3) & r - r_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}s_{12} & \frac{1}{2}s_{13} \\ \frac{1}{2}s_{21} & 0 & \frac{1}{2}s_{23} \\ \frac{1}{2}s_{31} & \frac{1}{2}s_{32} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}s_{12}s_{13}s_{23}$$

von gegebener Grösse ist. Die Gleichung für r allein wird gefunden, indem man

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a - a_1 & b - b_1 & r - r_1 \\ 0 & a - a_2 & b - b_2 & r - r_2 \\ 0 & a - a_3 & b - b_3 & r - r_3 \end{vmatrix}$$

mit der doppelten Fläche des Dreiecks der gegebenen Centren

$$T = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & a_1 - a & b_1 - b & r - r_1 \\ 1 & a_2 - a & b_2 - b & r - r_2 \\ 1 & a_3 - a & b_3 - b & r - r_3 \end{vmatrix}$$

multiplicirt, nämlich

$$ST = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -r + r_1 & 0 & \frac{1}{2}s_{12} & \frac{1}{2}s_{13} \\ -r + r_2 & \frac{1}{2}s_{12} & 0 & \frac{1}{2}s_{23} \\ -r + r_3 & \frac{1}{2}s_{13} & \frac{1}{2}s_{23} & 0 \end{vmatrix} = -Mr + N$$

Jeder Combination der Zeichen von r_1, r_2, r_3 (und der entgegengesetzten Zeichen) entsprechen 2 entgegengesetzt gleiche Werthe von S, mithin 2 verschiedene Werthe von r. Für mehr Dimensionen wird die entsprechende Aufgabe durch dasselbe Verfahren gelöst.

---

*) Mertens briefl. Mittheilung 1872 April. Crelle J. 77 p. 102.

10. Lagrange (sur les pyr. 17) hat das grösste Tetraeder untersucht, dessen Flächen gegebene Inhalte besitzen. Nach der in §. 16, 6 angenommenen Bezeichnung hat man

$$V^4 = (6AA_1A_2A_3)^4 = \Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}$$

und nach einer von Lagrange sur les pyr. 12 aufgestellten tetraedrometrischen Gleichung (s. des Verf. Elem. d. Math., Trigonometrie §. 6, 5)

$$4A_1A_2A_3{}^2 = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} + 2\gamma_{23} + 2\gamma_{31} + 2\gamma_{12}$$

Also sind γ_{11}, γ_{22}, γ_{33} und $s = \gamma_{23} + \gamma_{31} + \gamma_{12}$ gegebene Grössen und $V^4 = \Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}$ eine Function von 3 durch eine Gleichung verbundenen Variablen, die ein Maximum werden kann unter den Bedingungen

$$\frac{\partial V_4}{\partial \gamma_{23}} + \mu\frac{\partial s}{\partial \gamma_{23}} = 0, \quad \frac{\partial V^4}{\partial \gamma_{31}} + \mu\frac{\partial s}{\partial \gamma_{31}} = 0, \quad \frac{\partial V^4}{\partial \gamma_{12}} + \mu\frac{\partial s}{\partial \gamma_{12}} = 0$$

Nun ist $\frac{\partial s}{\partial \gamma_{23}} = 1$ und $\frac{1}{2}\frac{\partial V^4}{\partial \gamma_{23}}$ hat als Adjuncte von γ_{23} in $\Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}$ den Werth $V^4 c_{23}$ (§. 7, 3), u. s. w. Daher ist bei einem grössten Tetraeder

$$c_{23} = c_{31} = c_{12}$$

d. h. seine gegenüberliegenden Kanten sind normal zu einander, so dass die Höhen des Tetraeders sich in einem Punct schneiden*). Denn durch Projection von AA_2A_3 auf AA_1 findet man

$$AA_2 \cos r_1 r_2 + A_2A_3 \cos r_1 \varrho_1 + A_3A \cos r_1 r_3 = 0$$

indem man durch r_1, r_2, r_3, ϱ_1 die Geraden bezeichnet, auf denen AA_1, AA_2, AA_3, A_2A_3 liegen. Nun ist

$$AA_1 . AA_2 \cos r_1 r_2 = AA_1 . AA_3 \cos r_1 r_3, \quad AA_2 \cos r_1 r_2 + A_3 A \cos r_1 r_3 = 0$$

folglich $A_2A_3 \cos r_1 \varrho_1 = 0$.

Zur Berechnung der Elemente des gesuchten Tetraeders dient eine Gleichung 4ten Grades, von der eine positive Wurzel ohne Weiteres erkennbar ist. Es war aber von Lagrange nicht gezeigt

---

*) Diese Bemerkung ist von L'Huilier de relatione mutua capacitatis etc. p. 151 gemacht worden. Vergl. des Verf. Elem. d. Math., Stereometrie §. 6, 10.

worden, dass durch diese Wurzel und nur durch diese ein reales Tetraeder von grösstem Volum bestimmt wird. Diese Discussion ist von Borchardt auf Grund einer neuen und umfassenden Behandlung des ganzen Problems in 2 Abhandlungen (Berl. Acad. 1865 und 1866) gegeben worden*). Den folgenden Auszug seiner Arbeit hat Herr Borchardt 1870 zur Mittheilung an dieser Stelle zu verfassen die Güte gehabt.

I. Wo es nicht ausdrücklich anders bemerkt ist, sollen im Folgenden a, b Zahlen bedeuten, welche die Werthe 0, 1, 2, 3, 4 durchlaufen, i, k Zahlen, welche die Werthe 1, 2, 3, 4 durchlaufen, p, q Zahlen, welche die Werthe 2, 3, 4 durchlaufen. Wenn diese Buchstaben unter Summenzeichen stehen, so ist nach jedem Summationsbuchstaben besonders zu summiren.

Die Quadrate der Kanten eines Tetraeders bezeichne ich mit $(ik) = (ki)$, setze $(ii) = 0$, $(i0) = (0i) = 1$, $(00) = 0$, und nenne R die Determinante 5ter Ordnung der so bestimmten Elemente (ab)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12) & (13) & (14) \\ 1 & (21) & 0 & (23) & (24) \\ 1 & (31) & (32) & 0 & (34) \\ 1 & (41) & (42) & (43) & 0 \end{vmatrix}$$

Die 25 Unterdeterminanten erster Ordnung von R bezeichne ich mit $\varrho_{ab} = \frac{\partial R}{\partial (ab)}$. Dann werden das 6fache Volumen V des Tetraeders und die doppelten Inhalte V_1, V_2, V_3, V_4 seiner Seitenflächen durch die Gleichungen bestimmt (s. oben §. 16, 13)

$$8\,V^2 = R, \qquad -4\,V_i{}^2 = \varrho_{ii} = \frac{\partial R}{\partial (ii)}$$

Damit das Tetraeder real sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass die 6 Grössen (ik) positiv, die 4 Grössen $\varrho_{ii} = \frac{\partial R}{\partial (ii)}$ negativ und R positiv sei, Bedingungen, welche sich in die eine zusammenfassen lassen, dass die ternäre quadratische Form

*) Vergl. Lebesgue C. R. t. 66 p. 248. Mertens Crelle J. 83 p. 180.

$$f = \sum_{ik}(ik) y_i y_k \qquad (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0)$$

welche nach Elimination von y_1 und unter Einführung der Grössen

$$s_{pq} = (pq) - (p1) - (1q) + (11)$$

die Gestalt annimmt:

$$f = \sum_{pq} s_{pq} y_p y_q$$

eine **definite negative Form** sei, d. h. eine solche, welche für alle Werthe von y_2, y_3, y_4, das System $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$ ausgenommen, nur negativer Werthe, mit Ausschluss der Null, fähig ist.

II. Um den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, schicke ich einen allgemeinen Satz über quadratische Formen voraus, der später gebraucht wird.

Gesetzt die beiden quadratischen Formen

$$f = \sum_{pq} s_{pq} y_p y_q, \qquad f' = \sum_{p'} \mu_{p'} Y_{p'}^{2}$$

seien durch die Substitution

$$Y_{p'} = \sum_{p} g_p^{p'} y_p$$

in einander transformirbar, dann gehen gleichzeitig unter Einführung zweier neuen Systeme von je sechs Variablen $y_{pq} = y_{qp}$ und $Y_{pq} = Y_{qp}$ die beiden Formen

$$F = \sum_{pqp'q'} s_{pq'} s_{p'q} y_{pq} y_{p'q'} = \sum_{pqp'q'} s_{pp'} s_{qq'} y_{pq} y_{p'q'}, \qquad F' = \sum_{p'q'} \mu_{p'} \mu_{q'} Y_{p'q'}^{2}$$

durch die Substitution

$$Y_{p'q'} = \sum_{pq} g_p^{p'} g_q^{q'} y_{pq}$$

in einander über. Die Transformation von f' in f liefert nämlich die identischen Gleichungen

$$s_{pq} = \sum_{p'} \mu_{p'} g_p^{p'} g_q^{p'}$$

und vermittelst dieser Werthe der s_{pq} geht zugleich F' in F über.

Aus diesem Satz, der nicht nur für drei Variable y_2, y_3, y_4, sondern für jede Anzahl von Variablen gilt, geht hervor, dass

wenn f eine definite Form ist, d. h. wenn die Coefficienten μ_p' alle dasselbe Zeichen haben, auch F eine definite Form sein muss, und zwar diese letztere eine positive.

III. Das LAGRANGE'sche Maximum-Problem besteht darin, dass R zu einem Maximum zu machen ist, während die 4 Grössen $-\varrho_{ii} = -\frac{\partial R}{\partial(ii)}$ vier gegebenen positiven Constanten c_i gleich werden sollen, welche, wenn c_4 die grösste derselben ist, die Ungleichheit

$$\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \sqrt{c_3} > \sqrt{c_4}$$

erfüllen. — Um das Problem in Gleichung zu setzen, empfiehlt es sich, als Variable, nach welchen differentiirt wird, nicht die ursprünglichen Grössen (ik), sondern die Grössen ϱ_{ik} des adjungirten Systems zu wählen, zwischen welchen die Gleichungen

$$\varrho_{i1} + \varrho_{i2} + \varrho_{i3} + \varrho_{i4} = 0$$

bestehen (§. 3, 2). Indem ich aus den 25 Grössen ϱ_{ab} die Determinante

$$P = \Sigma \pm \varrho_{00}\varrho_{11} \ldots\ldots \varrho_{44}$$

und von derselben die Unterdeterminanten der verschiedenen Ordnungen bilde, ergiebt sich

$$P = R^4, \quad \frac{\partial P}{\partial \varrho_{00}} = R^3(00) = 0, \quad P' = \frac{\partial^2 P}{\partial \varrho_{00}\,\partial \varrho_{11}} = R^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -R^2$$

und mit Benutzung der oben definirten Grössen s_{pq}

$$\frac{\partial P'}{\partial \varrho_{pq}} = \frac{\partial^3 P}{\partial_{00}\,\partial \varrho_{11}\,\partial \varrho_{pq}} = R\Sigma \pm (00)(11)(pq) = -R s_{pq}$$

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial \varrho_{pq}\partial \varrho_{p'q'}} = \frac{\partial^4 P}{\partial \varrho_{00}\partial \varrho_{11}\partial \varrho_{pq}\partial \varrho_{p'q'}} = \Sigma \pm (00)(11)(pq)(p'q') = -(s_{pq}s_{p'q'} - s_{pq'}s_{p'q})$$

Hieraus ergeben sich die vollständigen Differentiale

$$-dP' = d(R^2) = 2RdR = R\Sigma s_{pq}d\varrho_{pq}$$
$$-d^2P' = d^2(R^2) = 2Rd^2R + 2dR^2 = \Sigma(s_{pq}s_{p'q'} - s_{pq'}s_{p'q})d\varrho_{pq}d\varrho_{p'q'}$$

oder

(1) $$2dR = \Sigma s_{pq}\,d\varrho_{pq}$$

(2) $$2(Rd^2R - dR^2) = -\Sigma s_{pq'}s_{p'q}\,d\varrho_{pq}d\varrho_{p'q'}$$

In den Summationen rechter Hand erhält jede der Zahlen p, q, p', q' die Werthe 2, 3, 4. Man kann aber auch noch den Werth 1 hinzufügen, da $s_{ik} = 0$ ist für $i = 1$ oder $k = 1$. Wenn man in den so erweiterten Summen für s_{ik}, $s_{ik'}$, $s_{i'k}$ ihre durch die Grössen (ik) ausgedrückten Werthe einsetzt und die Relationen $\varrho_{i1} + \varrho_{i2} + \varrho_{i3} + \varrho_{i4} = 0$ benutzt, ergeben sich die symmetrischen Ausdrücke

$$(3) \qquad 2dR = \Sigma(ik)d\varrho_{ik}$$

$$(4) \qquad 2(Rd^2R - dR^2) = -\Sigma(ik')(i'k)d\varrho_{ik}d\varrho_{i'k'}$$

IV. Nach diesen Vorbereitungen ergeben sich die Differentialgleichungen des vorliegenden Problems, indem man die Differentiale von R und von den vier Grössen $c_1 = -\varrho_{11} = \varrho_{12} + \varrho_{13} + \varrho_{14}$, etc. gleich Null setzt. So erhält man $0 = 2dR$

$$= 2(12)d\varrho_{12} + 2(13)d\varrho_{13} + 2(14)d\varrho_{14} + 2(23)d\varrho_{23} + 2(24)d\varrho_{24} + 2(34)d\varrho_{34}$$

$$\begin{aligned} 0 &= d\varrho_{12} + d\varrho_{13} + d\varrho_{14} \\ 0 &= d\varrho_{21} + d\varrho_{23} + d\varrho_{24} \\ 0 &= d\varrho_{31} + d\varrho_{32} + d\varrho_{34} \\ 0 &= d\varrho_{41} + d\varrho_{42} + d\varrho_{43} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen mit 1, $-v_1$, $-v_2$, $-v_3$, $-v_4$ multiplicirt und addirt geben eine Summe, in welcher der Coefficient jedes einzelnen Differentials verschwinden muss, daher für i von k verschieden

$$(5) \qquad (ik) = \tfrac{1}{2}(v_i + v_k)$$

Hierzu kommen zwei Bedingungen. Erstens muss

$$f = \sum_{pq} s_{pq}y_p y_q = \sum_{ik}(ik)\,y_i y_k$$

oder mit Benutzung von (5)

$$= -\Sigma v_i y_i^2 \qquad (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0)$$

eine definite negative Form sein. Zweitens muss d^2R negativ sein. Da aber für das Maximum bereits $dR = 0$ ist und nach Art. I in die erste Bedingung die Ungleichheit $R > 0$ eingeschlossen ist, so wird die zweite Bedingung erfüllt sein, sobald die rechte Seite von Gl. (2) negativ ist. Die rechte Seite von Gl. (2) geht aber für $d\varrho_{pq} = y_{pq}$ in die quadratische Form $-F$

des Art. II über, welche gleichzeitig mit f eine definite negative Form ist. Die zweite Bedingung ist also durch die erste von selbst erfüllt.

V. Nach Einsetzung der Werthe (5) in die Determinante R erhält dieselbe den Ausdruck

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (11)-v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & (22)-v_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & (33)-v_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & (44)-v_4 \end{vmatrix}$$

wo $(11) = (22) = (33) = (44) = 0$. Hieraus folgen für R und die vier Unterdeterminanten $\varrho_{ii} = -c_i$ die Werthe

$$R = PQ \qquad c_i = -\varrho_{ii} = -\frac{\partial R}{\partial_{(ii)}} = \frac{P}{v_i}\left(Q - \frac{1}{v_i}\right)$$

wo

$$P = v_1 v_2 v_3 v_4 \qquad Q = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}$$

Um die vier zwischen den gegebenen Grössen c_i und den unbekannten v_i bestehenden Gleichungen nach den v_i aufzulösen, setze ich

für P positiv	für P negativ
$w_i = \frac{\sqrt{P}}{v_i}$	$\omega_i = \frac{\sqrt{-P}}{v_i}$
$w = \sqrt{P}.Q = \Sigma w_i$	$\omega = \sqrt{-P}.Q = \Sigma \omega_i$
$z = \frac{1}{4}w^2 = \frac{1}{4}PQ^2$	$\zeta = \frac{1}{4}\omega^2 = -\frac{1}{4}PQ^2 = -z$

Hierdurch gehen die Gleichungen zwischen den v_i und c_i über in

$$w_i(w - w_i) = c_i \qquad\qquad \omega_i(\omega - \omega_i) = -c_i$$

oder   oder

$$(w_i - \tfrac{1}{2}w)^2 = z - c_i \qquad\qquad (\omega_i - \tfrac{1}{2}\omega)^2 = \zeta + c_i$$

Bedeuten e, e_i und ε, ε_i Grössen, welche der positiven oder negativen Einheit gleich sind, so lassen sich die Grössen w, w_i und ω, ω_i so darstellen

$$\tfrac{1}{2}w = e\sqrt{z} \qquad\qquad \tfrac{1}{2}\omega = \varepsilon\sqrt{\zeta}$$

$$w_i = e\sqrt{z} - ee_i\sqrt{z - c_i} \qquad\qquad \omega_i = \varepsilon\sqrt{\zeta} - \varepsilon\varepsilon_i\sqrt{\zeta + c_1}$$

und hieraus geht vermöge der Gleichungen $w = \Sigma w_i$, $\omega = \Sigma \omega_i$ für z oder $\zeta = -z$ die Endgleichung in irrationaler Form hervor:

$$(6) \qquad \begin{aligned} 2\sqrt{z} - e_1\sqrt{z-c_1} - \ldots - e_4\sqrt{z-c_4} &= 0 \\ 2\sqrt{\zeta} - \varepsilon_1\sqrt{\zeta+c_1} - \ldots - \varepsilon_4\sqrt{\zeta+c_4} &= 0 \end{aligned}$$

Hat man hieraus z oder ζ bestimmt, so setze man

$$\begin{aligned} W &= (\sqrt{z} - e_1\sqrt{z-c_1}) \ldots\ldots (\sqrt{z} - e_4\sqrt{z-c_4}) \\ \Omega &= (\sqrt{\zeta+c_1} - \varepsilon_1\sqrt{\zeta}) \ldots\ldots (\sqrt{\zeta+c_4} - \varepsilon_4\sqrt{\zeta}) \end{aligned}$$

wo Ω für jeden positiven Werth von ζ positiv ist und W für diejenigen positiven Werthe von z, welche grösser als die grösste der Constanten c_i, d. h. grösser als c_4 sind. Unter Einführung des Zeichens

$$\varepsilon' = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4$$

ergiebt sich jetzt

$$W = P \qquad \qquad \Omega = -\varepsilon' P$$

man kann daher setzen

$$e\sqrt{P} = \sqrt{W} \qquad \qquad -\varepsilon\sqrt{-P} = \sqrt{\varepsilon'\Omega}$$

und erhält demzufolge für v_i, R die Ausdrücke:

$$v_i = \frac{\sqrt{P}}{w_i} = \frac{\sqrt{W}}{\sqrt{z} - e_i\sqrt{z-c_i}} \qquad v_i = \frac{\sqrt{-P}}{\omega_i} = \varepsilon_i \frac{\sqrt{\varepsilon'\Omega}}{\sqrt{\zeta+c_i} - \varepsilon_i\sqrt{\zeta}}$$

$$R = PQ = w\sqrt{P} = 2\sqrt{z}\sqrt{W} \qquad \qquad R = 2\sqrt{\zeta}\sqrt{\varepsilon'\Omega}$$

VI. Die irrationale Gleichung (6) in z oder $\zeta = -z$ wird rational gemacht, indem man die Norm ihrer linken Seite, d. h. das Product der 16 irrationalen Factoren, welche den verschiedenen Werthen der Vorzeichen $e_1 \ldots . e_4$ oder $\varepsilon_1 \ldots . \varepsilon_4$ entsprechen, bildet, und dieses Product, welches ich mit $\Phi(z) = \Phi(-\zeta)$ bezeichne, $= 0$ setzt. Jeder der 16 irrationalen Factoren giebt, nach fallenden Potenzen von z oder ζ geordnet, eine Entwicklung der Form.

$$Az^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}Bz^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{8}Cz^{-\frac{3}{2}} \ldots . \qquad A'\zeta^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}B'\zeta^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{8}C'\zeta^{-\frac{3}{2}} \ldots .$$

wo

$A = 2 - \Sigma e_i,\ B = \Sigma e_i c_i,\ C = \Sigma e_i c_i^2,\ A' = 2 - \Sigma \varepsilon_i,\ B' = \Sigma \varepsilon_i c_i,\ C' = \Sigma \varepsilon_i c_i^2$

In zwölf Factoren ist der Coefficient A (oder A') von der Null verschieden, in denjenigen vier dagegen, in welchen von den vier Vorzeichen e_i oder ε_i eines negativ, die drei anderen positiv sind, ist der Coefficient A (oder A') des ersten Gliedes der Entwicklung $= 0$. Die Norm Φ ist daher in z oder ζ nicht von höherem als dem vierten Grade. Unter den vierten Grad kann Φ nur sinken, wenn in einem der bezeichneten vier Factoren ausser dem Coefficienten des ersten Gliedes der Entwicklung auch der Coefficient des zweiten Gliedes verschwindet. Dies ist nur in einen der 4 Factoren möglich, nämlich in demjenigen, für welchen $e_1 = e_2' = e_3 = +1$, $e_4 = -1$, und in diesem auch nur dann, wenn zwischen den Constanten c_i die Relation

$$c_1 + c_2 + c_3 = c_4$$

besteht. In diesem Fall ist $\Phi(z)$ nur vom dritten Grade.

Die Wurzeln der Gleichung $\Phi(z) = 0$ sind sämmtlich reell und drei derselben immer negativ, entsprechen also positiven Werthen von ζ. Sie gehören den 6 irrationalen Factoren in ζ an, für welche von den vier Zeichen ε_i zwei positiv, zwei negativ sind. Betrachtet man z. B. die beiden Factoren

$$2\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta + c_1} + \sqrt{\zeta + c_2} - \sqrt{\zeta + c_3} - \sqrt{\zeta + c_4}$$

$$2\sqrt{\zeta} - \sqrt{\zeta + c_1} - \sqrt{\zeta + c_2} + \sqrt{\zeta + c_3} + \sqrt{\zeta + c_4}$$

so ändern sich dieselben von $\zeta = 0$ bis $\zeta = +\infty$ continuirlich. Für $\zeta = 0$ haben sie entgegengesetzte Werthe, wenn dagegen ζ in positivem Sinne über alle Grenzen wächst, werden beide Factoren positiv, einer derselben hat daher eine positive Wurzel $\zeta = \zeta_1$. Auf ähnliche Weise lässt sich die Existenz zweier anderen Wurzeln $\zeta = \zeta_2$, $\zeta = \zeta_3$ nachweisen. Aber diesen drei Wurzeln entsprechen imaginäre Lösungen des Maximum-Problems. Denn für jede derselben ist

$$\varepsilon' = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = -1$$

also $\sqrt{\varepsilon' \Omega}$ imaginär, wodurch sämmtliche Grössen v_i und R imaginär werden.

Die jetzt noch übrige vierte Wurzel von $\Phi(z) = 0$ giebt immer eine reelle Lösung des Maximum-Problems. Zu ihrer Bestimmung müssen die beiden Fälle unterschieden werden, in welchen

$$c_4 > c_1 + c_2 + c_3 \quad \text{oder} \quad c_4 < c_1 + c_2 + c_3$$

Für den beide Fälle von einander trennenden Grenzfall $c_4 = c_1 + c_2 + c_3$ wissen wir bereits, dass die vierte Wurzel von $\Phi(z) = 0$ unendlich gross ist. In diesem Falle geben die Formeln des vorigen Art.

$$v_1 = \sqrt{\frac{c_2 c_3}{c_1}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{c_1 c_3}{c_2}}, \quad v_3 = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{c_3}}, \quad v_4 = 0$$

also

$$(12) = (14) + (24), \quad (13) = (14) + (34), \quad (23) = (24) + (34)$$

d. h. die Ecke im Puncte (4) ist drei-rechtwinklig.

Es sei

$$c_4 > c_1 + c_2 + c_3$$

alsdann genügt der irrationalen Gleichung

$$2\sqrt{\zeta} - \sqrt{\zeta + c_1} - \sqrt{\zeta + c_2} - \sqrt{\zeta + c_3} + \sqrt{\zeta + c_4} = 0$$

eine positive Wurzel $\zeta = \zeta_0$, da die linke Seite für $\zeta = 0$ den negativen Werth $-\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2} - \sqrt{c_3} + \sqrt{c_4}$ annimmt, während ihre Entwickelung

$$-\tfrac{1}{2}(c_1 + c_2 + c_3 - c_4)\zeta^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{8}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - c_4^2)\zeta^{-\frac{3}{2}} \ldots\ldots$$

zeigt, dass sie für hinreichend grosse Werthe von ζ positiv wird. In diesem Fall ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$, $\varepsilon_4 = -1$, $\varepsilon' = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = +1$, $\varepsilon'\Omega = \Omega$ positiv also $\sqrt{\varepsilon'\Omega}$ reell. Nimmt man den positiven Werth dieser Quadratwurzel, so werden nach den Formeln des vorigen Art. v_1, v_2, v_3 positiv, v_4 negativ, R positiv. Da in

$$-f = v_1 y_1^2 + v_2 y_2^2 + v_3 y_3^2 + v_4 y_4^2 \qquad (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0)$$

drei der Multiplicatoren v_i positiv, einer negativ ist, so genügt es, dass die Determinante R von $-f$ positiv sei, damit $-f$ eine definite positive Form sei. Somit ist die Nebenbedingung erfüllt und die Lösung eine reelle.

Es sei zweitens

$$c_4 < c_1 + c_2 + c_3$$

man setze

$$\psi(z) = 2\sqrt{z} - \sqrt{z - c_1} - \sqrt{z - c_2} - \sqrt{z - c_3} - \eta\sqrt{z - c_4}$$

wo $\eta = +1$ oder $= -1$, je nachdem

$$\psi(c_4) = 2\sqrt{c_4} - \sqrt{c_4 - c_1} - \sqrt{c_4 - c_2} - \sqrt{c_4 - c_3}$$

positiv oder negativ ist, dann hat $\psi(z) = 0$ eine Wurzel $z = z_0$ zwischen $z = c_4$ und $z = +\infty$. In der That die Entwicklung nach fallenden Potenzen von z giebt

für $\eta = +1$ $\qquad \psi(z) = -2z^{\frac{1}{2}} + (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)z^{-\frac{1}{2}}\ldots.$

für $\eta = -1$ $\qquad \psi(z) = \frac{1}{2}(c_1 + c_2 + c_3 - c_4)z^{-\frac{1}{2}} + \ldots.$

also machen hinreichend grosse Werthe von z den Ausdruck $\psi(z)$ negativ für $\eta = +1$, positiv für $\eta = -1$, d. h. von entgegengesetztem Zeichen mit η, während er für $z = c_4$ von gleichem Zeichen mit η ist, womit die Existenz der Wurzel $z = z_0$ bewiesen ist.

In diesem Falle werden nach den Formeln des Art. V und für den positiven Werth der Quadratwurzel $\sqrt{W}$ sämmtliche Grössen v_1, v_2, v_3, v_4, R positiv, und es bedarf daher keines Beweises, dass

$$f = -\sum_i v_i y_i^2$$

eine definite negative Form ist.

11. Wie unter den Tetraedern, deren Flächen gegebene Inhalte haben, das Tetraeder von grösstem Volum gefunden wird, ebenso ist von Borchardt (Berl. Monatsber. 1867 p. 779, 1872 p. 505) unter den concentrischen Ellipsoiden, welche in weniger als 6 gegebenen Stellungen Centralschnitte von gegebenen Inhalten haben, das Ellipsoid von kleinstem Volum bestimmt worden.

Eine ternäre quadratische Form mit unbestimmten Coefficienten ist 6fach unbestimmt. Durch den Werth, welchen die Form in einem gegebenen Punct hat, d h. bei einem System gegebener Werthe der Variablen, wird ein Coefficient bestimmt; also ist die Form, welche in weniger als 6 gegebenen Puncten

gegebene Werthe hat, einfach oder mehrfach unbestimmt. In dem LAGRANGE'schen Problem (10) wird nun unter den positiven ternären quadratischen Formen

$$\Sigma \gamma_{rs} x_r x_s \qquad r, s = 1, 2, 3 \qquad \gamma_{sr} = \gamma_{rs}$$

welche in 4 Puncten $1|0|0$, $0|1|0$, $0|0|1$, $1|1|1$ die gegebenen Werthe γ_{11}, γ_{22}, γ_{33}, $4 A_1 A_2 A_3{}^2$ haben, die Form gesucht, deren Determinante $\Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}$ möglichst gross ist. Das algebraische Problem, unter den positiven ternären quadratischen Formen, welche in weniger als 6 Puncten gegebene Werthe haben, die Form mit grösster Determinante zu bestimmen, ist von KRONECKER (Berl. Monatsbericht 1872 Juni) gestellt und gelöst worden. Die Lösung ergab in geometrischer Anwendung nicht nur das Tetraeder von grösstem Volum bei gegebenen Inhalten seiner Flächen, sondern auch das Ellipsoid von kleinstem Volum bei gegebenem Centrum und bei 4 gegebenen Puncten seiner Oberfläche. Herr KRONECKER hat mir eine Bearbeitung seines Monatsberichts freundlich zur Verfügung gestellt, auf welche die folgende Darstellung gegründet ist.

I. Eine quadratische Form F der x_1, x_2, x_3, welche die gegebenen Werthe

$$F(1, 0, 0) = f_1^2, \quad F(0, 1, 0) = f_2^2, \quad F(0, 0, 1) = f_3^2, \quad F(1, 1, 1) = f_4^2$$

haben soll, kann durch

$$(f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3)^2 - 2c_1 f_2 f_3 x_2 x_3 - 2c_2 f_1 f_3 x_1 x_3 - 2c_3 f_1 f_2 x_1 x_2$$

ausgedrückt werden unter der Bedingung

$$f_4^2 = (f_1 + f_2 + f_3)^2 - 2c_1 f_2 f_3 - 2c_2 f_1 f_3 - 2c_3 f_1 f_2$$

Damit aber F eine positive Form sei, wie im Folgenden angenommen wird, ist nothwendig die binäre Form $F(0, x_2, x_3)$ und ihre Determinante $(2 - c_1) c_1 f_2{}^2 f_3{}^2$ nicht negativ, d. h. c_1 zwischen 0 und 2. Ebenso müssen c_2, c_3 zwischen 0 und 2 liegen. Folglich müssen die gegebenen Werthe der Begrenzung unterliegen

$$0 < (f_1 + f_2 + f_3)^2 - f_4^2 < 4 f_2 f_3 + 4 f_1 f_3 + 4 f_1 f_2$$

Die Grössen f_1, f_2, f_3, f_4 werden als positive, f_4 als die grösste derselben vorausgesetzt; dann ist nothwendig

$$f_4 < f_1 + f_2 + f_3$$

während $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - f_4^2$ negativ oder begrenzt positiv sein kann.

II. Die Form

$$V = v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + v_3 x_3^2 - (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)^2$$

welche unter der Bedingung

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 1$$

die Werthe hat

$$V(1, 0, 0) = v_1 - v_1^2, \quad V(0, 1, 0) = v_2 - v_2^2, \quad V(0, 0, 1) = v_3 - v_3^2$$
$$V(1, 1, 1) = v_4 - v_4^2$$

lässt sich so bestimmen, dass diese Werthe den $f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2$ proportional sind. Dazu hat man für $i = 1, 2, 3$

$$v_i - v_i^2 = \frac{f_i^2}{f_4^2}(v_4 - v_4^2) \quad \text{d. i.} \quad 1 - 2v_i = \sqrt{1 - \frac{4f_i^2}{f_4^2}(v_4 - v_4^2)}$$

zu setzen, und findet durch Summirung

$$1 + 2v_4 = \Sigma \sqrt{1 - \frac{4f_i^2}{f_4^2}(v_4 - v_4^2)}$$

die Gleichung für v_4; jedem v_4 entsprechen bestimmte v_1, v_2, v_3. Die Wurzel $v_4 = 1$ ist unbrauchbar, weil dabei v_1, v_2, v_3 null sind.

III. Unter der Voraussetzung positiver Quadratwurzeln von positiven Zahlen hat die irrationale Function von v_4

$$1 + 2v_4 - \Sigma \sqrt{1 - \frac{4f_i^2}{f_4^2}(v_4 - v_4^2)}$$

bei $v_4 = 0$ den Werth -2; bei positiv unendlichem v_4 hat sie den Werth

$$2v_4 \left(1 - \frac{f_1 + f_2 + f_3}{f_4}\right)$$

der auch negativ ist (I). Wenn $v_4 - 1 = h$ verschwindend, so hat die Function den Werth

$$2h\frac{f_1^2+f_2^2+f_3^2-f_4^2}{f_4^2}+2h^2\frac{f_1^4+f_2^4+f_3^4}{f_4^4}$$

welcher in dem Fall, dass $f_1^{\,2}+f_2^{\,2}+f_3^{\,2}-f_4^{\,2}$ null ist, positiv ist sowohl bei positivem als bei negativem h. Wenn aber $f_1^{\,2}+f_2^{\,2}+f_3^{\,2}-f_4^{\,2}$ nicht null ist, und das Zeichen von h mit dem Zeichen dieser Formel übereinstimmt, so hat die Function den Werth

$$2h\frac{f_1^2+f_2^2+f_3^2-f_4^2}{f_4^2}$$

welcher positiv ist. Also hat die Gleichung für v_4 bei positivem $f_1^{\,2}+f_2^{\,2}+f_3^{\,2}-f_4^{\,2}$ eine Wurzel zwischen 0 und 1; bei $f_1^{\,2}+\ldots=0$ eine Wurzel zwischen 0 und 1, zwei Wurzeln 1, und eine Wurzel zwischen 1 und ∞; bei negativem $f_1^{\,2}+\ldots$ eine Wurzel zwischen 1 und ∞.

IV. Einer positiven Wurzel v_4 entsprechen positive Quadratwurzeln $1-2v_i$, so dass auch $2-2v_1-2v_2$ positiv ist. Bei $v_4<1$ ist $v_4-v_4^{\,2}$ positiv, $1-2v_i<1$, v_i positiv; bei $v_4>1$ ist $v_4-v_4^{\,2}$ negativ, $1-2v_i>1$, v_i negativ. Wenn nun ε diejenige Quadratwurzel von 1 bedeutet, welche mit $v_4-v_4^{\,2}$ eines Zeichens ist, so sind

$$\varepsilon(v_4-v_4^2),\quad \varepsilon(v_i-v_i^2),\quad \varepsilon v_i$$

$$\varepsilon V(x_1,0,0)=\varepsilon(v_1-v_1^2)x_1^2$$

$$\det \varepsilon V(x_1,x_2,0)=v_1v_2(1-v_1-v_2)$$

$$\det \varepsilon V=\varepsilon\begin{vmatrix} v_1-v_1^2 & -v_1v_2 & -v_1v_3\\ -v_1v_2 & v_2-v_2^2 & -v_2v_3\\ -v_1v_3 & -v_2v_3 & v_3-v_3^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\varepsilon & v_1 & v_2 & v_3\\ v_1 & v_1 & 0 & 0\\ v_2 & 0 & v_2 & 0\\ v_3 & 0 & 0 & v_3\end{vmatrix}$$

$$=\varepsilon v_1v_2v_3(1-v_1-v_2-v_3)=\varepsilon v_1v_2v_3v_4$$

sämmtlich positiv. Mithin ist die so bestimmte Form εV eine positive Form.

V. Wenn $rf_4^{\,2}=v_4-v_4^{\,2}$, so ist εr positiv, und man kann aus der Gleichung

$$1-2v_4=\sqrt{1-4rf_4^2}$$

durch Addition der 3 Gleichungen $1 - 2v_i = \sqrt{1 - 4rf_i^2}$ (II) auch die Gleichung für r ableiten

$$2 = \Sigma\sqrt{1 - 4rf_k^2} \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

Da nun die Form $rF - V$ null ist in den 4 Puncten $1|0|0$, $0|1|0$, $0|0|1$, $1|1|1$, so ist sie ausdrückbar durch

$$2w_1x_2x_3 + 2w_2x_1x_3 + 2w_3x_1x_2$$

unter der Bedingung $w_1 + w_2 + w_3 = 0$. Also ist die positive Form εrF ausdrückbar durch

$$\varepsilon(v_1x_1^2 + ..) - \varepsilon(v_1x_1 + ..)^2 + 2\varepsilon(w_1x_2x_3 + ..)$$

Die positive Form $\varepsilon(v_1x_1^2 + ..)$ und die indefinite Form $2\varepsilon(w_1x_2x_3 + ..)$ können beide nach §. 14, 13 in lineare Formen der Quadrate von z_1, z_2, z_3, linearer Formen der x_1, x_2, x_3, transformirt werden, so dass

$$\varepsilon(v_1x_1^2 + ..) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$

$$2\varepsilon(w_1x_2x_3 + ..) = p_1z_1^2 + p_2z_2^2 + p_3z_3^2$$

Durch Differentiation nach x_1, x_2, x_3 und Addition erhält man dann

$$\varepsilon(v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3) = t_1z_1 + t_2z_2 + t_3z_3$$

wo

$$t_i = \frac{\partial z_i}{\partial x_1} + \frac{\partial z_i}{\partial x_2} + \frac{\partial z_i}{\partial x_3} = z_i(1, 1, 1)$$

Daher ist auch

$$\varepsilon(v_1 + v_2 + v_3) = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$$

$$0 = p_1t_1^2 + p_2t_2^2 + p_3t_3^2$$

Die Coefficienten p_1, p_2, p_3 sind real als die Wurzeln der Gleichung für ϱ

$$\begin{vmatrix} \varrho v_1 & w_3 & w_2 \\ w_3 & \varrho v_2 & w_1 \\ w_2 & w_1 & \varrho v_3 \end{vmatrix} = 0$$

In dieser Gleichung ist der Coefficient von ϱ^2 null, folglich

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0$$

und mit Hülfe von $p_1 t_1^2 + p_2 t_2^2 + p_3 t_3^2 = 0$

$$p_1 : p_2 : p_3 : p = t_2^2 - t_3^2 : t_3^2 - t_1^2 : t_1^2 - t_2^2 : 1$$

so dass p bestimmt ist.

VI. Durch die angezeigte Transformation geht die positive Form $\varepsilon r F$ der x_1, x_2, x_3 über in die Form G

$$(1 + p_1)z_1^2 + (1 + p_2)z_2^2 + (1 + p_3)z_3^2 - \varepsilon(t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3)^2$$

Diese Form der z_1, z_2, z_3 ist positiv, also sind positiv

$$(1 + p_1)\left(1 - \frac{\varepsilon t_1^2}{1 + p_1}\right)$$

$$(1 + p_1)(1 + p_2)\left(1 - \frac{\varepsilon t_1^2}{1 + p_1} - \frac{\varepsilon t_2^2}{1 + p_2}\right)$$

$$(1 + p_1)(1 + p_2)(1 + p_3)\left(1 - \frac{\varepsilon t_1^2}{1 + p_1} - \frac{\varepsilon t_2^2}{1 + p_2} - \frac{\varepsilon t_3^2}{1 + p_3}\right)$$

Die Binomien $1 + p_1$, $1 + p_2$, $1 + p_3$ können nicht alle negativ sein, weil sie die Summe 3 haben. Bei $\varepsilon = 1$ ist $1 + p_1 - t_1^2$ positiv, also $1 + p_1$ positiv. Bei $\varepsilon = -1$ ist $1 + p_1 + t_1^2$ positiv; wenn nun $1 + p_1$ negativ, so ist $1 + p_2$ nicht negativ. Denn unter der Voraussetzung negativer $1 + p_1$ und $1 + p_2$ wären negativ

$$1 + \frac{t_1^2}{1 + p_1}, \qquad 1 + \frac{t_1^2}{1 + p_1} + \frac{t_2^2}{1 + p_2}$$

$$(1 + p_1)(1 + p_2)\left(1 + \frac{t_1^2}{1 + p_1} + \frac{t_2^2}{1 + p_2}\right)$$

Daher giebt es unter den 3 Binomien 2 positive z. B. $1 + p_1$ und $1 + p_2$, und es giebt positive m, n, q der Art dass

$$1 + p_1 = m^2 \qquad 1 + p_2 = n^2$$

$$(1 + p_1)(1 + p_2)(1 + p_3) = (3 - m^2 - n^2)m^2 n^2$$

$$= 1 - (m - n)^2 m^2 n^2 - (1 + 2mn)(mn - 1)^2 = 1 - q^2$$

In der That ist 1 der grösste Werth, den das Product von drei Factoren haben kann, deren Summe 3 ist.

VII. Bei $\varepsilon = 1$ ist (V) $v_1 + v_2 + v_3 = t_1{}^2 + t_2{}^2 + t_3{}^2$, und

$$1 - v_4 = t_1^2(1 - p_1) + t_2^2(1 - p_2) + t_3^2(1 - p_3)$$

folglich

$$\frac{\det G}{(1+p_1)(1+p_2)(1+p_3)} = v_4 + t_1^2(1-p_1) + t_2^2(1-p_2) + t_3^2(1-p_3)$$

$$- \frac{t_1^2}{1+p_1} - \frac{t_2^2}{1+p_2} - \frac{t_3^2}{1+p_3}$$

$$= v_4 - \frac{t_1^2 p_1^2}{1+p_1} - \frac{t_2^2 p_2^2}{1+p_2} - \frac{t_3^2 p_3^2}{1+p_3}$$

$$\det G = v_4 - v_4 q^2$$

$$- t_1^2 p_1^2 (1+p_2)(1+p_3) - t_2^2 p_2^2 (1+p_1)(1+p_3) - t_3^2 p_3^2 (1+p_1)(1+p_2)$$

Bei $\varepsilon = 1$ sind die auf v_4 folgenden Glieder nicht positiv; also ist v_4 der Werth, den die Determinante der Form G nicht übersteigt, und den sie nur dadurch erreicht, dass p_1, p_2, also auch p_3, q verschwinden.

Bei $\varepsilon = -1$ hat $\det G$ den Werth

$$1 - q^2 + t_1^2(1+p_2)(1+p_3) + \ldots = 1 - q^2 + t_1^2(1 - p_1 + p_2 p_3) + \ldots$$

$$= v_4 - q^2 + t_1^2 p_2 p_3 + t_2^2 p_1 p_3 + t_3^2 p_1 p_2$$

Die letzten 3 Glieder werden durch

$$- p^2 t_1^2 (t_1^2 - t_2^2)(t_1^2 - t_3^2) - p^2 t_2^2 (t_2^2 - t_1^2)(t_2^2 - t_3^2) - p^2 t_3^2 (t_3^2 - t_1^2)(t_3^2 - t_2^2)$$

ausgedrückt, von denen jedenfalls eines und die Summe der beiden andern nicht positiv ist. Wenn z. B. $t_3{}^2$ nicht mehr als $t_1{}^2$ und nicht mehr als $t_2{}^2$, so ist das letzte Glied nicht positiv, und die Summe der beiden andern

$$- p^2(t_1^2 - t_2^2)(t_1^4 - t_1^2 t_3^2 - t_2^4 + t_2^2 t_3^2) = - p^2 (t_1^2 - t_2^2)^2 (t_1^2 + t_2^2 - t_3^2)$$

nicht positiv. Also ist auch in diesem Fall v_4 der Werth, den die Determinante von G nicht übersteigt, und den sie nur bei $p = 0$ erreicht, wobei p_1, p_2, p_3, q null sind.

VIII. Man erhält $\det \varepsilon r F$ aus $\det G$, wie $\det \varepsilon (v_1 x_1{}^2 + \ldots)$ aus $\det (z_1{}^2 + \ldots)$ durch Multiplication mit δ^2, wo δ die Deter-

minante der linearen Formen z_1, z_2, z_3 d. h. der linearen Substitution ist, durch welche die quadratischen Formen der z in Formen der x transformirt werden:

$$\det \varepsilon r F = \delta^2 \det G$$

$$\det \varepsilon(v_1 x_1^2 + ..) = \delta^2 \det(z_1^2 + ..)$$

Demnach ist

$$\det \varepsilon r F = \varepsilon v_1 v_2 v_3 \det G$$

$$\det F = \frac{v_1 v_2 v_3}{r^3} \det G = \frac{f_1^2 f_2^2 f_3^2}{(1 - v_1)(1 - v_2)(1 - v_3)} \det G$$

und nicht grösser als

$$\frac{f_1^2 f_2^2 f_3^2}{(1 - v_1)(1 - v_2)(1 - v_3)} v_4$$

Diese grösste Determinante wird nur dadurch erreicht, dass p_1, p_2, p_3 verschwinden (VII); die entsprechende Form wird also nur dadurch erhalten, dass w_1, w_2, w_3 verschwinden (V). Die Form mit der grössten Determinante ist

$$\frac{1}{r}(v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + v_3 x_3^2) - \frac{1}{r}(v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)^2$$

und hat die adjungirte Form

$$\frac{v_1 v_2 v_3 v_4}{r^3}\left(\frac{x_1^2}{v_1} + \frac{x_2^2}{v_2} + \frac{x_3^2}{v_3} + \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{v_4}\right)$$

IX. Wenn den Gleichungen (II) die Werthe v_4', v_1', v_2', v_3', r' genügen, so kann die Form mit der grössten Determinante

$$\frac{1}{r'}(v_1' x_1^2 + ..) - \frac{1}{r'}(v_1' x_1 + ..)^2$$

von der vorher gefundenen Form nicht verschieden sein. Also ist bei allen x

$$r(v_1' x_1^2 + ..) - r'(v_1 x_1^2 + ..) = r(v_1' x_1 + ..)^2 - r'(v_1 x_1 + ..)^2$$

eine durch 2 Quadrate darstellbare Form. Die Determinante derselben ist null, d. h.

$$(r v_1' - r' v_1)(r v_2' - r' v_2)(r v_3' - r' v_3) = 0$$

folglich z. B. $rv_1' - r'v_1 = 0$. Die Vergleichung der Coefficienten giebt dann

$$rv_1'^2 - r'v_1^2 = 0, \quad rv_1'v_2' - r'v_1v_2 = 0, \quad rv_1'v_3' - r'v_1v_3 = 0$$

d. h. $v_1' = v_1$, $v_2' = v_2$, $v_3' = v_3'$, $r' = r$. Hieraus erkennt man, dass ein zweites System v_4', v_1', v_2', v_3', r' den Gleichungen (II) nicht genügt.

Die geometrischen Anwendungen findet man in dem angeführten Monatsbericht.